Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2012–13

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt[1]). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3\,(2+3i)^n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}\, z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt{13}$. (b) 1.

(2) (6 pt). Sia $z = \sqrt{3} - i$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad \mathrm{Im}(z^{10}) \qquad\qquad (b)\quad |(1-i)^z| \qquad\qquad (c)\quad \mathrm{Re}(z^{-i})$$

Risp: (a) $2^9\sqrt{3}$. (b) $\exp[\frac{1}{2}\sqrt{3}\log 2 - \pi/4]$. (c) $e^{-\pi/6}\cos\log 2$.

(3) (6 pt). Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}(z^n)$ nel limite $z \to 0$

$$(a)\quad \sin[(e^z - \cos z)^2] \qquad\qquad (b)\quad \tan\log[1+\sin z]$$

Risp: (a) $\mathcal{O}(z^2)$. (b) $\mathcal{O}(z)$.

(4) (6 pt). Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$\mathrm{Re}\big(\exp(\exp z)\big)$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\big(\exp(\exp z)\big) &= \mathrm{Re}\exp(w) && [\text{pongo } w := \exp z] \\ &= e^{\mathrm{Re}\,w}\,\cos(\mathrm{Im}\,w) \\ &= \exp\big[e^x\,\cos y\big]\,\cos\big[e^x\,\sin y\big] \end{aligned}$$

(5) (8 pt). Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^2 della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$$

Risp: $1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \mathcal{O}\left(z^3\right)$.

(6) (8 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z|=1} \overline{z}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z-1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1}\, dz$$

Soluzione. (a) La funzione $\overline{z}$ non è analitica. Calcolo l'integrale usando la definizione, parametrizzando opportunamente il cammino di integrazione.

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}}\, e^{it}\, i dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it}\, e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(b) Sia $f(z) := \cos(\pi z)/(z+1)$. Questa funzione è analitica su $G := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$. Poichè il cammino di integrazione è omotopo a zero su G, posso applicare la formula integrale di Cauchy. In questo modo ottengo

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \frac{\cos\pi}{2} = -\pi i\,.$$

(7) (6 pt). Sia f una funzione intera (analitica su $\mathbb{C}$) che soddisfa la seguente condizione: esistono $A>0$, $B>0$ tali che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|f(z)| \leq A + B|z|$. Cosa posso affermare su f? (Dimostrare).

Soluzione. La funzione f è della forma $f(z) = c_0 + c_1 z$ con $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, quindi è un polinomio di grado 0 (se $c_1 = 0$) o 1. Infatti, sia $w \in \mathbb{C}$ e sia

$$M(w,R) := \max_{z\in B_R(w)} |f(z)|\,.$$

Poichè si ha $B_R(w) \subset B_{R+|w|}(0)$, grazie alle ipotesi su f posso scrivere

$$M(w,R) \leq \max_{z\in B_R(w)} (A + B|z|) \leq \max_{|z|\leq R+|w|} (A+B|z|) = A + B(R+|w|)\,.$$

Utilizzando la stima di Cauchy sul disco di raggio R centrato in w, si ottiene, per la derivata seconda di f,

$$|f''(w)| \leq \frac{M(w,R)\,2!}{R^2} \leq \frac{2(A+B(R+|w|))}{R^2} \qquad \forall R>0\,.$$

Facendo il limite $R\to\infty$, ottengo $f''(w)=0$. Poichè w è un punto arbitrario, f' deve essere costante, vale a dire esiste $c_1 \in \mathbb{C}$ tale che $f'(z) = c_1$. Di conseguenza $f(z) = c_0 + c_1 z$.

(8) (8 pt). Si considerino gli sviluppi in serie di Taylor della funzione $f(z) = \tan(z^2)$ con centro rispettivamente in 0 e i.

$$(a)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \tan(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-i)^n\,.$$

Determinare i raggi di convergenza R_a ed R_b delle serie (a) e (b).

Soluzione. La funzione $f(z) = \tan(z^2)$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$ con l'eccezione di quei punti in cui $\cos(z^2)=0$. Sia quindi

$$X := \{z\in\mathbb{C} : \cos(z^2) = 0\}.$$

Il raggio di convergenza della serie di Taylor con centro z_0 è dato, in generale, dalla distanza fra z_0 e X. Determino quindi X. Imponendo $\cos(z^2) = 0$ trovo

$$z^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}\,,$$

che posso anche scrivere come

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{\pi}{2} + k\pi && k\in\mathbb{N}\\ z^2 &= -\Big(\frac{\pi}{2}+k\pi\Big) && k\in\mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$X = \Big\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi} : k\in\mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{\pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi} : k\in\mathbb{N}\Big\}\,.$$

Posso dunque concludere

$$R_a = \mathrm{dist}(0,X) = \sqrt{\pi/2} \qquad\qquad R_b = \mathrm{dist}(i,X) = \sqrt{\pi/2} - 1\,.$$