Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2012–13

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{\sin z}{z^2\,(z^2+9)^3} \qquad\qquad (b)\quad \frac{z+1}{e^{\pi z^2}-1}$$

Nel caso (b) disegnare *accuratamente* sul piano complesso tutti i punti di singolarità che si trovano all'interno del disco di raggio 2.1 centrato in 0.

Schema di soluzione. (a) Gli zeri den denominatore sono

$$\begin{aligned} &z=0 && \text{molteplicità } 2\\ &z=\pm 3i && \text{molteplicità } 3\,. \end{aligned}$$

Poichè il numeratore ha uno zero semplice in $z=0$ e non si annulla in $z=\pm 3i$, possiamo concludere che le singolarità sono

$$\begin{aligned} &z=0 && \text{polo di ordine } 1\\ &z=\pm 3i && \text{poli di ordine } 3\,. \end{aligned}$$

(b) Trovo gli zeri del denominatore

$$e^{\pi z^2}=1 \quad\Longrightarrow\quad \pi z^2 = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z} \quad\Longrightarrow\quad z^2=2ki,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Consideriamo 3 casi

$$\begin{aligned} &k=0 && z=0\\ &k>0 && z_1=\sqrt{2k}\,e^{i\pi/4},\ z_2=\sqrt{2k}\,e^{i5\pi/4}\\ &k<0 && z_1=\sqrt{|2k|}\,e^{-i\pi/4},\ z_2=\sqrt{|2k|}\,e^{i3\pi/4} \end{aligned}$$

Gli zeri del denominatore sono quindi

$$z=0, \qquad z_{k,n}=\sqrt{2k}\,e^{i(\pi/4+n\pi/2)},\ k\in\mathbb{N}^*,\ n=0,1,2,3\,.$$

Poichè il numeratore non si annulla in nessuno di questi punti, l'ordine di ciascun polo è uguale alla molteplicità dello zero del denominatore. Si ha

$$\begin{aligned} &D(z)=e^{\pi z^2}-1 && &&\\ &D'(z)=2\pi z\,e^{\pi z^2} && D'(0)=0 && D'(z_{k,n})\neq 0\\ &D''(z)=2\pi\,e^{\pi z^2}\,(1+2\pi z^2) && D''(0)\neq 0\,. && \end{aligned}$$

Quindi $z=0$ è uno zero doppio, mentre tutti i punti $z_{k,n}$ sono zeri semplici. Le singolarità dell'integrando sono quindi

$$\begin{aligned} &z=0 && \text{polo di ordine } 2\\ &z=z_{k,n},\ k\in\mathbb{N}^*,\ n=0,1,2,3 && \text{poli semplici}\,. \end{aligned}$$

(2) (4 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z|=4}\frac{e^{z^2}\,(z+i\pi)}{z\sinh z}\,dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=5}\frac{ze^{1/z}}{z+4}\,dz$$

Schema di soluzione. (a) Si ha

$$\int_{|z|=4} \frac{e^{z^2}\,(z+i\pi)}{z\,\sinh z}\,dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,i\pi)] = 2\pi i\left[1-2e^{-\pi^2}\right].$$

(b) L'integrando ha un polo semplice in -4 e una singolarità essenziale in 0. Poichè tutte le singolarità dell'integrando si trovano all'interno del cammino di integrazione, posso scrivere

$$\int_{|z|=5} \frac{ze^{1/z}}{z+4}\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -6\pi i\,.$$

(3) (4 pt). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4\sqrt{3}\,x+16}$$

Risp: $\pi\sin(\pi/12)$.

(4) (4 pt). Sapendo che vale il seguente sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$

$$e^{ax} \sim \frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{a-ik}\,e^{ikx} \qquad\qquad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0\,,$$

(a) calcolare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}$

(b) usando opportunamente il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier nel punto $x=\pi$, si ottiene un'altra identità. Scrivere questa identità.

Soluzione. (a) Sia $f(x) := e^{ax}$ e sia $\tilde{f}$ il prolungamento periodico di f a tutto $\mathbb{R}$. Poichè $\tilde{f}$ è differenziabile a tratti ed è continua in 0 posso scrivere

$$f(0) = 1 = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{a-ik}\,.$$

Scrivendo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{a-ik} = \frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{a-ik}-\frac{(-1)^k}{a+ik}\right] = \frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2a}{a^2+k^2}$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2a\,\sinh(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}\,.$$

(b) Poichè $\tilde{f}$ è discontinua in π, si ha

$$\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{a-ik}\,e^{ik\pi}\,.$$

Procedendo come nel caso precedente, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2a}\,\coth(a\pi)-\frac{1}{2a^2}\,.$$

(5) (3 pt). Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$f(x) = x^n\, e^{-|x|} \qquad\qquad \text{con } n \text{ intero non negativo.}$$

Soluzione. Poichè $x^k f \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni intero positivo k, $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Il valore di q è determinato dalla condizione

$$\begin{array}{ll} f,\ f',\ f'', \dots, f^{(q-1)} & \qquad\text{continue} \\ f^{(q)} & \qquad\text{continua a tratti}\,. \end{array}$$

L'unico punto possibile di discontinuità per le derivate di f è l'origine. Si ha per $x > 0$

$$f(x) = f_+(x) = x^n\, e^{-x}\,,$$

quindi usando la regola di Leibniz,

$$f_+^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j(x^n)\, D^{k-j}(e^{-x}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} D^j(x^n)\, e^{-x}\,.$$

Poichè

$$\left[D^j(x^n)\right]_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{se } j = n \\ 0 & \text{se } j \neq n \end{cases}$$

ottengo

$$f_+^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ (-1)^{k-n} \binom{k}{n} n! = (-1)^{k-n} \frac{k!}{(k-n)!} & \text{se } k \geq n\,. \end{cases}$$

Il caso $x < 0$ in cui

$$f(x) = f_-(x) = x^n\, e^{x}$$

si tratta in modo analogo al precedente. Si ottiene

$$f_-^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ \frac{k!}{(k-n)!} & \text{se } k \geq n\,. \end{cases}$$

Possiamo così concludere che il più piccolo valore di k tale che $f_+^{(k)}(0) \neq f_-^{(k)}(0)$ è $k = n+1$. Quindi $q = n + 1$.

(6) (4 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = xe^{-x^2+2x}$$

Soluzione. (a) Posso scrivere

$$f(x) = g(x+1) \quad \text{in cui} \quad g(x) := \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = e^{i\lambda}\,\hat{g}(\lambda) = \pi\, e^{-|\lambda|+i\lambda}\,.$$

(b) Si ha

$$f(x) = e\,x\,g(x-1) \quad \text{in cui} \quad g(x) = e^{-x^2}\,,$$

quindi

$$\hat{f}(\lambda) = iD\left[e^{-i\lambda}\,\hat{g}(\lambda)\right] = i\sqrt{\pi}D\left[e^{-i\lambda-\lambda^2/4}\right] = \sqrt{\pi}e^{-i\lambda-\lambda^2/4}\left(1-\frac{i\lambda}{2}\right)\,.$$

(7) (4 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) := \frac{e^{-|x|}\,\sin(ax)}{x} \qquad a>0\,.$$

Soluzione. Pongo

$$g(x) := e^{-|x|} \qquad\qquad h(x) := e^{-|x|}\,\sin(ax)\,.$$

Allora

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{2i}\left[\hat{g}(\lambda-a)-\hat{g}(\lambda+a)\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{1}{(\lambda-a)^2+1}-\frac{1}{(\lambda+a)^2+1}\right]\,.$$

D'altra parte $h(x) = xf(x)$, quindi

$$\hat{h}(\lambda) = iD\hat{f}(\lambda)\,.$$

Ottengo dunque

$$D\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda+a)^2+1}-\frac{1}{(\lambda-a)^2+1}\,,$$

e, integrando,

$$\hat{f}(\lambda) = \arctan(\lambda+a)-\arctan(\lambda-a)+c \qquad c\in\mathbb{R}\,.$$

So che la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$ tende a zero all'infinito. Questo mi permette di determinare la costante di integrazione come $c=0$.