Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2

Filippo Cesi – 2012–13

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(2-i)^n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(i^n+4)^n\, z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt{5}$. (b) $1/5$.

(2) (6 pt). Sia $z = 1 - i\sqrt{3}$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad \mathrm{Re}(z^{10}) \qquad\qquad (b)\quad |(1-i)^z| \qquad\qquad (c)\quad \mathrm{Re}(z^i)$$

Risp: (a) -2^9. (b) $\sqrt{2}\exp(-\sqrt{3}\pi/4)$. (c) $e^{\pi/3}\cos\log 2$.

(3) (5 pt). Sia $f(z)$ una funzione intera che non si annulla mai, ad eccezione del punto $z = 1$ che rappresenta uno zero semplice di f e sia

$$g(z) = \frac{e^z}{f(z^3)}.$$

Supponendo di sviluppare g in serie di Taylor con centro nel punto -2

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z+2)^n$$

determinare il raggio di convergenza R di questa serie di potenze.

Soluzione. Poichè e^z non si annulla mai, la funzione g è analitica su tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione di quei punti in cui si annulla il denominatore. Sia quindi

$$X := \{z \in \mathbb{C} : f(z^3) = 0\}.$$

Il raggio di convergenza della serie di Taylor con centro in w è dato quindi dalla distanza fra w e X. Determino quindi X. Imponendo $f(z^3) = 0$, vale a dire $z^3 = 1$, ottengo

$$X = \{z_0, z_1, z_2\} \qquad \text{in cui } z_k = e^{2k\pi/3}.$$

Posso dunque concludere

$$R = \mathrm{dist}(-2, X) = |-2 - z_1| = \Big| -2 - \Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big| = \sqrt{3}.$$

(4) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z-5|=3} \frac{e^z}{z^2\,\sin z}\,dz$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{e^z}{z^2\,\sin z}.$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

f è una funzione analitica su $\mathbb{C}$ eccetto i punti in cui si annulla il denominatore $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Le singolarità all'interno del cammino di integrazione sono $z = \pi$ e $z = 2\pi$, entrambi poli semplici. Quindi

$$\int\limits_{|z-5|=3} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, \pi) + \mathrm{Res}(f, 2\pi)\right) .$$

Il residuo in un polo generico $z = k\pi$ (tranne $k = 0$ che è un polo di ordine 3) è dato da

$$\mathrm{Res}(f, k\pi) = \left.\frac{e^z}{2z \sin z + z^2 \cos z}\right|_{z=k\pi} = (-1)^k \frac{e^{k\pi}}{\pi^2 k^2} .$$

Otteniamo quindi

$$\int\limits_{|z-5|=3} f(z)\, dz = \frac{2i}{\pi}\left(-e^{\pi} + \frac{e^{2\pi}}{4}\right) = \frac{ie^{\pi}}{2\pi}\left(e^{\pi} - 4\right) .$$

(5) (5 pt). Calcolare il seguente integrale (attenzione: il risultato deve essere un numero reale per un motivo ben noto, quindi esprimete il risultato in termini di quantità palesemente reali)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Schema di soluzione. L'integrale può essere chiuso nel semipiano superiore. Quindi, ponendo

$$f(x) := \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e}.$$

(6) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti (H è la funzione a gradino di Heaviside)

$$(a)\quad xe^{-3x^2+5ibx} \qquad\qquad (b)\quad e^{3x-6}H(2-x)$$

Risp: (a) $-\frac{i}{6}\sqrt{\frac{\pi}{3}}(\lambda - 5b)\exp\left(-\frac{(\lambda-5b)^2}{12}\right)$. (b) $\frac{e^{-2i\lambda}}{3-i\lambda}$

(7) (5 pt). Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(x) = f(2x) + f(2x - \pi). \qquad ①$$

Sia $\widehat{f}$ la trasformata di Fourier di f. Supponiamo di conoscere $\widehat{f}$ nell'intervallo $[2, 3]$

$$\widehat{f}(\lambda) = \sin(\pi\lambda) \qquad \text{per ogni } \lambda \in [2, 3].$$

Quanto vale $|\widehat{f}(5)|$? (Fornire una risposta *numerica*).

Soluzione. Facendo la trasformata di Fourier della ① ottengo

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i\lambda\pi/2}\right)\widehat{f}(\lambda/2),$$

quindi

$$\widehat{f}(5) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i5\pi/2}\right)\widehat{f}(5/2) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i5\pi/2}\right)\sin(5\pi/2) = \frac{1-i}{2},$$

e dunque $|\widehat{f}(5)| = 1/\sqrt{2}$.

(8) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D\left[e^{|x|}D^2\left(xe^{-|x|}\right)\right]$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} D^2\left(x\,e^{-|x|}\right) &= D\left(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x+1)\right) = D\left(e^{-|x|}(1-|x|)\right) \\ &= e^{-|x|}\big[(|x|-1)\operatorname{sgn}x - \operatorname{sgn}x)\big] = e^{-|x|}(x-2\operatorname{sgn}x)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D\left[e^{|x|}D^2\left(xe^{-|x|}\right)\right] = D(x-2\operatorname{sgn}x) = 1-4\delta_0\,.$$

(9) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (fornire, se possibile, una risposta numerica)

$$\int 2^{-|x|}\,\delta\Big(\cos\Big(\frac{\pi x}{3}\Big)-\frac{1}{2}\Big)\,dx.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \cos(\pi x/3) - 1/2$ si annulla nei punti

$$x_k = \pm 1 + 6k \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = |\pi/3\,\sin(\pi x_k/3)| = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

si ottiene

$$\delta(\cos(\pi x/3)-1/2) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\delta_{1+6k}+\delta_{-1+6k}\right]\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-|x|}\,\delta(\cos(\pi x/3)-1/2)\,dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-|x|}\,\big[\delta(x-1+6k)+\delta(x+1+6k)\big]\,dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[2^{-|1+6k|}+2^{-|-1+6k|}\right] = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-|1+6k|} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}2^{-(1+6k)}+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(6k-1)}\right] \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{2^{-1}}{1-2^{-6}}+\frac{2^1 2^{-6}}{1-2^{-6}}\right] = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\,\frac{2^5+2}{2^6-1} = \frac{136\sqrt{3}}{63\pi}. \end{aligned}$$

(10) (6 pt). Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.

(11) (0.1 pt) Qual è il titolo dell'album con questa copertina (sugg: conviene usare il potente metodo del "tirare a indovinare")

Schema di soluzione. Immaginando di non conoscere la risposta (lo so è inconcepibile, ma a volte bisogna sapere affrontare l'inconcepibile) mi chiedo... cosa c'è raffigurato sulle magliette?

Washing Machine.