Metodi Matematici della Fisica. S3

Filippo Cesi – 2012–13

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

6 CFU	8 CFU	4 + 6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+3i)^n}$$

Risp: (a) 1. (b) $\sqrt{10}$.

(2) (5 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^{-z} = 1 - i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 16 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Soluzione. Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^{-z} = \exp(-z\log(i)) = \exp\big[-z(\log|i| + i\,\mathrm{Arg}\,i)\big] = e^{-iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^{-z} = 1 - i$ diventa dunque

$$e^{-iz\pi/2} = 1 - i\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$-iz\frac{\pi}{2} = \log|1-i| + i(\arg(1-i) + 2k\pi) = \frac{1}{2}\log 2 + i(-\pi/4 + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k + \frac{1}{2} + i\,\frac{\log 2}{\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 16 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\,\mathrm{Re}\, z| \le 8 \qquad |\,\mathrm{Im}\, z| \le 8\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 4:

$$z_{-2},\ z_{-1},\ z_0\ z_1\,.$$

(3) (5 pt). Sia f una funzione analitica sulla semistriscia $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Re}\, z < 15,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Sapendo che $|f(z)| \le \mathrm{Im}\, z$ per ogni $z \in G$, come posso maggiorare la quantità $|f''(z_0)|$ in cui $z_0 = 12 + 5i$? [Sugg: fare un disegno accurato].

Soluzione. Sia (fare un disegno)

$$R = \mathrm{dist}(z_0, G^c) = 3\,.$$

f è analitica sul disco $B_R(z_0)$. Inoltre, all'interno di questo disco, vale la disuguaglianza

$$|f(z)| \le \mathrm{Im}\, z \le 5 + R = 8 \qquad\qquad \forall z \in B_R(z_0)\,.$$

Per il teorema sulla stima di Cauchy si ha

$$|f''(z_0)| \le \frac{8 \cdot 2!}{R^2} = \frac{16}{9}\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

(4) (6 pt). Calcolare gli integrali

$$(a) \quad \int_\gamma \frac{z^3\,dz}{e^{\pi z}+1} \qquad \gamma(t) := 1+2i+2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$(b) \quad \int_{|z|=2} \frac{2z^4+3}{z^5+1}\,dz$$

Soluzione. (a) Si osservi che il cammino di integrazione è il cerchio di raggio 2, centrato nel punto $1+2i$ e orientato positivamente. La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici di $e^{\pi z}+1$. Tali zeri sono $z_k = i(1+2k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Per il teorema dei residui si conclude

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z^3\,dz}{e^{\pi z}+1} &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}\Big(\frac{z^3}{e^{\pi z}+1}, z_0\Big) + \operatorname{Res}\Big(\frac{z^3}{e^{\pi z}+1}, z_1\Big)\right] \\
&= 2\pi i \left(\frac{z_0^3}{\pi e^{\pi z_0}} + \frac{z_1^3}{\pi e^{\pi z_1}}\right) = -2i\big[i^3 + (3i)^3\big] \\
&= -56
\end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{2z^4+3}{z^5+1}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big].$$

Poichè

$$\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{3z^4+2}{z(z^5+1)}\,,$$

otengo

$$\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big] = 2\,.$$

Quindi

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 4\pi i\,.$$

(5) (5 pt). Calcolare il seguente integrale (attenzione: il risultato deve essere un numero reale, quindi esprimete il risultato in termini di quantità palesemente reali)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{x}}{x^2+4x+16}\,dx$$

Soluzione. Denotando con $[z^\alpha]^+$ il ramo "+" di z^α, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo, ottengo

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4x+16} = \frac{2\pi i}{1-e^{i\pi}} \left[\operatorname{Res}(f, -2+2\sqrt{3}i) + \operatorname{Res}(f, -2+\sqrt{3}i)\right] \\
&= \pi i \frac{\big[(-2+2\sqrt{3}i)^{1/2}\big]^+ - \big[(-2-2\sqrt{3}i)^{1/2}\big]^+}{4i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\, 2\,(e^{i\pi/3} - e^{i2\pi/3}) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

(6) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) \quad \frac{1}{(1+4x^2)^2} \qquad\qquad (b) \quad x^3\, e^{-x^2}\,.$$

Risp: (a) $\frac{\pi}{8} e^{-|\lambda|/2}(|\lambda|+2)$. (b) $\frac{1}{8}\sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \lambda \left(\lambda^2 - 6\right)$.

(7) (5 pt). Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ due funzioni che soddisfano la relazione $f''(x) = e^{3ix} g(x-1)$ e siano $\hat{f}$ e $\hat{g}$ le trasformate di Fourier di f e g. Sapendo che

$$\hat{g}(\lambda) = \sin(\pi\lambda/4)\, e^{-\lambda^2} \qquad \text{per } \lambda \le 0\,,$$

quanto vale $\hat{f}(1)$?

Soluzione. Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della relazione $f''(x) = e^{3ix} g(x-1)$ si ottiene

$$(i\lambda)^2 \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[g(x-1)](\lambda - 3) = \left[e^{-i\lambda}\hat{g}(\lambda)\right]_{\lambda \to \lambda - 3} = e^{-i(\lambda-3)}\hat{g}(\lambda - 3)\,,$$

vale a dire

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{-i(\lambda-3)} \hat{g}(\lambda-3)\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(1) = -e^{2i}\hat{g}(-2) = -e^{2i}\sin(-\pi/2)e^{-4} = e^{2i-4}\,.$$

(8) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3(|1-x^2|)$$

Soluzione. Si ha

$$|1-x^2| = (1-x^2)\ \mathrm{sgn}(1-x^2)\,.$$

Poichè $D\,\mathrm{sgn}(1-x^2) = 2(\delta_{-1} - 2\delta_1)$, ottengo

$$\begin{aligned}
D^3\left(|1-x^2|\right) &= D^2\left[-2x\ \mathrm{sgn}(1-x^2) + (1-x^2)\,2(\delta_{-1} - \delta_1)\right] \\
&= 2\,D^2\left[-x\ \mathrm{sgn}(1-x^2) + (1-x^2)\,(\delta_{-1} - \delta_1)\right] \\
&= -2\,D^2\left[x\ \mathrm{sgn}(1-x^2)\right] \\
&= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(1-x^2) + 2x\,(\delta_{-1} - \delta_1)\right] \\
&= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(1-x^2) - 2(\delta_{-1} + \delta_1)\right] \\
&= -4\ \left[(\delta_{-1} - \delta_1) - (\delta'_{-1} + \delta'_1)\right]
\end{aligned}$$

(9) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac". Scrivere il risultato finale (se necessario approssimandolo) sotto forma decimale con due cifre dopo il punto (es: 8.33).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/3}\,\delta(x^5 - x)\,dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^5 - x$ si annulla nei punti

$$x^5 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \pm 1\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 5x^4 - 1 \qquad\qquad |b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = 4$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^3 - x) = \delta_0 + (\delta_1 + \delta_{-1})/4\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\pi/3}\,\delta(x^3 - x)\,dx &= \delta_0(e^{ix\pi/3}) + \frac{1}{4}\big[\delta_1(e^{ix\pi/3}) + \delta_{-1}(e^{ix\pi/3})\big] \\ &= 1 + \frac{1}{4}\big(e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}\big) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\pi/3) = 5/4 = 1.25\,.\end{aligned}$$

(10) (6 pt). Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^4 dx\,. \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

[Sugg: utilizzare opportunamente la trasformata di Fourier].

Risp: $2|a|^3\pi/3$.