Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2013–14

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (1 pt[1]). Scrivere sul frontespizio nome e cognome in stampatello e fare una croce sul numero di CFU.

(2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)^n\, z^{3n} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$$

Soluzione. (a) Poichè

$$|(2+3i)^n|^{1/3n} = |2+3i|^{1/3} = (\sqrt{13})^{1/3} = \sqrt[6]{13}\,,$$

si ha

$$R = \frac{1}{\sqrt[6]{13}}\,.$$

(b) Col criterio del rapporto si ottiene $R = 1/4$.

(3) (6 pt). Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

$$(a)\quad z_0 = \pi/2,\ f(z) = \cos\log\sin z - 1 \qquad\qquad (b)\quad z_0 = 0,\ f(z) = \exp\bigl[\sin(z^2) - z^2\bigr] - 1$$

Soluzione. (a) Ponendo $z = z_0 + w$ ottengo

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos\log\sin(\pi/2 + w) - 1 = \cos\log\cos(w) - 1 = \cos\log(1 + \mathcal{O}(w^2)) - 1 \\ &= \cos(\mathcal{O}(w^2)) - 1 = 1 + \mathcal{O}(w^4)) - 1 = \mathcal{O}(w^4)) = \mathcal{O}((z-z_0)^4)\,. \end{aligned}$$

(b)

$$f(z) = \exp\bigl[\sin(z^2) - z^2\bigr] - 1 = \exp\bigl[\mathcal{O}(z^6)\bigr] - 1 = \mathcal{O}(z^6)\,.$$

(4) (6 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)\,(z^2+1)}{z^3\,(e^{\pi z}+1)^2}$$

Schema di soluzione. Il denominatore ha i seguenti zeri

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{molteplicità } 3 \\ z = i(1+2k) & \text{molteplicità } 2\,. \end{array}$$

Il numeratore ha i seguenti zeri

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{molteplicità } 2 \\ z = \pm i & \text{molteplicità } 1\,. \end{array}$$

Combinando queste informazioni otteniamo che le singolarità di f sono

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \text{polo di ordine } 1 \\ z = i(1+2k),\ k \notin \{-1,0\} & \text{polo di ordine } 2 \\ z = \pm i & \text{polo di ordine } 1\,. \end{array}$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(5) (7 pt). Calcolare l'integrale

$$\int_{|z-3|=4} \frac{dz}{z\,(e^{iz}-1)}$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^{iz}-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$z_0 = 0$	polo di ordine 2
$z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$	polo di ordine 1

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi$. Si calcola facilmente

$$\mathrm{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \mathrm{Res}(f,2\pi) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-3|=4} \frac{dz}{z\,(e^{iz}-1)} = 2\pi i\,\big[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,2\pi)\big] = 1 - i\pi\,.$$

(6) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z}}{1+3z^2}\,dz$$

Soluzione. Poichè tutte le singolarità dell'integrando si trovano all'interno del cammino di integrazione, posso usare il metodo del residuo all'infinito, ottenendo

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z}}{1+3z^2}\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right),0\right) = \frac{2\pi i}{3}\,.$$

(7) (7 pt). Sia $\gamma = [0,1,1+i,i,0]$, vale a dire γ è il cammino che percorre il quadrato di vertici 0, 1, $1+i$, i in senso antiorario. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^5+1}\,.$$

Soluzione. L'integrando ha 5 poli semplici nei punti

$$z_k = \exp\Big(\frac{i\pi}{5}(1+2k)\Big) \qquad\qquad k = 0,1,2,3,4\,.$$

L'unico polo che si trova all'interno di γ è z_0. Quindi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^5+1} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,z_0) = 2\pi i\frac{1}{5z_0^4} = -\frac{2\pi i}{5}z_0 = -\frac{2\pi i}{5}e^{i\pi/5}\,.$$

(8) (6 pt). Sia n un intero positivo. La funzione $f(z) = 1/(z^n+1)^2$ ha n poli di ordine 2 nei punti

$$z_k = \exp\Big[\frac{i\pi}{n}(1+2k)\Big] \qquad\qquad k = 0,1,\ldots,n-1\,.$$

Dimostrare che esiste una funzione $g(n)$ tale che il residuo di f in z_k può essere espresso come

$$\mathrm{Res}(f,z_k) = g(n)\,z_k\,.$$

Determinare $g(n)$.

Risp: $g(n) = -(n-1)/n^2$.

(9) (6 pt). Sia γ un cammino chiuso e sia $z \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma\}$. Dimostrare che l'indice di γ rispetto a z è un numero intero.