Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2013–14

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}\,dx}{x^2+4x+8}\,.$$

Soluzione. Sia γ il cammino chiuso a forma di "pacman" con la bocca coincidente con il semiasse reale positivo e sia

$$f(z) := \frac{[z^{2/3}]^+}{z^2+4z+8}$$

in cui $[\ ]^+$ indica che sto scegliendo il ramo $+$ della radice, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo. Allora si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}\,dx}{x^2+4x+8} = \frac{2\pi i}{1-e^{i4\pi/3}}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{1-e^{i4\pi/3}}\sum_k \mathrm{Res}(f,z_k)\,,$$

in cui z_k sono le singolarità isolate di f. In questo caso ci sono due singolarità isolate

$$\begin{aligned} z_+ &= -2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}\\ z_- &= -2-2i = 2\sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}\,. \end{aligned}$$

e sono entrambi poli semplici. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,z_+) &= \frac{[z_+^{2/3}]^+}{4i} = \frac{1}{4i}(2\sqrt{2})^{2/3}e^{i\pi/2} = \frac{1}{2}\\ \mathrm{Res}(f,z_-) &= \frac{[z_-^{2/3}]^+}{-4i} = \frac{i}{4}(2\sqrt{2})^{2/3}e^{i5\pi/6} = \frac{1}{2}e^{i4\pi/3}\,. \end{aligned}$$

In questo modo si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{2/3}\,dx}{x^2+4x+8} &= \frac{2\pi i}{1-e^{i4\pi/3}}\,\frac{1}{2}\left[1+e^{i4\pi/3}\right]\\ &= \frac{\pi}{i}\,\frac{e^{i2\pi/3}\big(e^{-i2\pi/3}+e^{i2\pi/3}\big)}{e^{i2\pi/3}\big(e^{-i2\pi/3}-e^{+i2\pi/3}\big)}\\ &= -\pi\frac{\cos(2\pi/3)}{\sin(2\pi/3)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

(2) (12 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\ \ D^3\big(xe^xD^4|x|\big) \qquad (b)\ \ D\big[e^{|x|}D^2\big(\cos x\, e^{-|x|}\big)\big] \qquad (c)\ \ D\lfloor x^2\rfloor\,.$$

Risp: (a) $4\big[\delta_0^{(3)}-\delta_0^{(4)}\big]$. (b) $2\cos x\ \mathrm{sgn}\, x - 2\delta_0'$. (c) $\sum_{k=1}^\infty(\delta_{\sqrt{k}}-\delta_{-\sqrt{k}})$.

(3) (9 pt). La funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x\in[-\pi,0)\\ \cos(x/4) & x\in[0,\pi] \end{cases}$$

ha il seguente sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$

$$f(x)\sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{16k^2-1}\cos(kx) + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\big(\sqrt{2}(-1)^k-2\big)k}{16k^2-1}\sin(kx)\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

Calcolare

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{64k^2-1}\,.$$

Soluzione. (a) Il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ci dice che

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1} = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

(b) Dalla convergenza puntuale in $x = \pi$ si ottiene

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1} = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\cos(\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

che implica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\,.$$

(c) Sommando le due serie ottenute ai punti (a) e (b), si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16(2k)^2-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{64k^2-1}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{64k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,.$$

(4) (10 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\ \ f(x) = \frac{x^2}{(1+4x^2)^2} \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = xe^{-x^2+2x}$$

(a) Parto dalla seguente coppia $g(x)$, $\hat{g}(\lambda)$

$$\frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad \pi e^{-|\lambda|}\,.$$

Sostituendo $x \to 2x$, ottengo

$$\frac{1}{1+4x^2} \qquad\qquad \frac{\pi}{2}e^{-|\lambda/2|} = \frac{\pi}{2}e^{-|\lambda|/2}\,.$$

Passando da $g(x)$ a $g'(x)$, si ottiene

$$-\frac{8x}{(1+4x^2)^2} \qquad\qquad \frac{i\pi\lambda}{2}e^{-|\lambda|/2}\,.$$

A questo agisco con $g(x) \to -xg(x)/8$

$$\frac{x^2}{(1+4x^2)^2} \qquad\qquad -\frac{1}{8}iD\Big(\frac{i\pi\lambda}{2}e^{-|\lambda|/2}\Big) = \frac{\pi}{16}\Big(e^{-|\lambda|/2} - \frac{\lambda}{2}e^{-|\lambda|/2}\,\mathrm{sgn}(\lambda)\Big)\,.$$

Ho ottenuto quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\pi}{16}e^{-|\lambda|/2}\Big(1 - \frac{|\lambda|}{2}\Big)\,.$$

(b) Si ottiene (Vedi 2012-13/E2)

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\pi}e^{1-i\lambda-\lambda^2/4}\left(1 - \frac{i\lambda}{2}\right)\,.$$

(5) (8 pt). Risolvere la seguente equazione del calore nell'intervallo $[0,\ell]$, in cui $f(x)$ è la condizione iniziale nota e $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \lambda\, u_{xx}(x,t) & & x \in [0,\ell]\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) & & x \in [0,\ell] \\ u_x(0,t) &= u_x(\ell,t) = 0 & & t > 0\,. \end{aligned}$$

(6) (7 pt). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sufficientemente regolare (si può supporre ad esempio che f sia C^2 che e vada a zero all'infinito come $1/x^2$ o più velocemente). La condizione $f'(0) = 0$ cosa implica sulla trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f?

Soluzione. Le ipotesi di regolarità garantiscono che vale il teorema di inversione, quindi

$$\mathcal{F}[s\widehat{f}(s)](t) = iD\mathcal{F}[\widehat{f}(s)](t) = 2\pi iDf(-t) = -2\pi i f'(-t).$$

Scegliendo $t = 0$ ottengo

$$\mathcal{F}[s\widehat{f}(s)](0) = 0,$$

vale a dire, esplicitamente,

$$\int_{\mathbb{R}} s\,\widehat{f}(s)\,ds = 0.$$