Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2013–14

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt[1]). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(2-i)^n\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n!}}\, z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt{5}$. (b) ∞.

(2) (6 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z|=2}\frac{z^4+2z^3+1}{z^4+4}\,dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{2\sin(\pi z)-1}\,.$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{z^4+2z^3+1}{z^4+4}\,.$$

Poichè tutte le singolarità si trovano all'interno del cammino di integrazione, ottengo

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),\,0\Big) = 4\pi i\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z}{2\sin(\pi z)-1}\,.$$

Allora

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\ [\mathrm{Res}(f,1/6)+\mathrm{Res}(f,5/6)] = 2\pi i\ \left[\frac{1}{6\sqrt{3}\pi}-\frac{1}{5\sqrt{3}\pi}\right] = -\frac{4i}{3\sqrt{3}}\,.$$

(3) (6 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,.$$

Soluzione. Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,dx\\
&= \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,dx\\
&= \mathrm{Re}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}\,dz}{(z^2-2z+2)^2}\right] \qquad\qquad \gamma_R = [-R,R]+Re^{it}\ t\in[0,\pi]\\
&= \mathrm{Re}\left[2\pi i\ \mathrm{Res}\big(g(z),1+i\big)\right]\ ,
\end{aligned}$$

in cui

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-2z+2)^2}\,.$$

Poniamo

$$z_+ := 1+i \qquad\qquad z_- := 1-i\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

Trattandosi di un polo di ordine 2, posso scrivere

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\big(g(z), z_+\big) &= \lim_{z\to z_+} D\left[(z-z_+)^2\, g(z)\right] \\
&= \lim_{z\to z_+} D\left[\frac{e^{iz}}{(z-z_-)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to z_+} \frac{ie^{iz}(z-z_-)^2 - 2e^{iz}(z-z_-)}{(z-z_-)^4} \\
&= e^{iz_+}\frac{i(z_+-z_-)^2 - 2(z_+-z_-)}{(z_+-z_-)^4} \\
&= e^{iz_+}\frac{i(z_+-z_-) - 2}{(z_+-z_-)^3} \\
&= -e^{-1+i}\frac{4}{(2i)^3} = e^{-1+i}\frac{1}{2i}
\end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i\left(e^{-1+i}\frac{1}{2i}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\pi e^{-1+i}\right] = \frac{\pi\cos(1)}{e}\,.$$

(4) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3\left[e^{-x^2}\,\delta_0^{(2)}\right]$$

Risp: $-2\delta_0^{(3)} + \delta_0^{(5)}$.

(5) (5 pt). Sia $F(x) = H(x)\sin(\omega x)$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e $\omega > 0$. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F'' + \omega^2 F$.

Soluzione. Si ha

$$F'(x) = \sin(\omega x)\delta_0 + \omega H(x)\cos(\omega x) = \omega H(x)\cos(\omega x)\,,$$

quindi

$$F''(x) = \omega\cos(\omega x)\delta_0 - \omega^2 H(x)\sin(\omega x) = \omega\delta_0 - \omega^2 H(x)\sin(\omega x)\,.$$

Otteniamo così

$$F''(x) + \omega^2 F(x) = \omega\delta_0\,.$$

(6) (6 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1-|x| & \text{se } |x|\le 1 \\ 0 & \text{se } 1 < |x| \le \pi \end{cases}$$

Sfruttando la convergenza nell'origine, si ottiene una formula che dà il valore di una particolare serie numerica. Scrivere questa formula.

Risp: $f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k}{k^2}\cos(kx)$. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$.

(7) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = x^2 e^{-x^2} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = x e^{-x} H(x-2)$$

Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \mathcal{F}[x^2 e^{-x^2}](\lambda) = (iD)^2 \mathcal{F}[e^{-x^2}](\lambda) = -D^2 \left(\sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\lambda^2/4} \left(\lambda^2 - 2\right). \end{aligned}$$

(b) Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl} & H(x)\, e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\ [x \to x-2] & H(x-2)\, e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-2i\lambda}}{1+i\lambda} \\ [f(x) \to x f(x)] & H(x-2)\, x\, e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-2i\lambda}\, \dfrac{2\lambda - 3i}{(1+i\lambda)^2} \\ [f(x) \to e^{-2} f(x)] & H(x-2)\, x\, e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\lambda - 2}\, \dfrac{3+2i\lambda}{(1+i\lambda)^2} \end{array}$$

(8) (5 pt). Enunciare e dimostrare il teorema del residuo all'infinito.

(9) (4 pt). Determinare l'ordine di grandezza $\mathcal{O}((z-z_0)^n)$ nel limite $z \to z_0$

$$(a)\quad z_0 = 0,\ f(z) = \sinh\big[z - \sin z\big] \qquad\qquad (b)\quad z_0 = 0,\ f(z) = \log\cos(z^2)$$

Soluzione. (a) Si ha

$$\sinh\big[z - \sin z\big] = \sinh\big[z - (z + \mathcal{O}(z^3)) = \sinh\big[\mathcal{O}(z^3) = \mathcal{O}(z^3)\,.$$

(b) Si ha

$$\log\cos(z^2) = \log\big[1 + \mathcal{O}(z^4)\big] = \mathcal{O}(z^4)\,.$$

(10) (5 pt). Sia F una distribuzione su $\mathcal{K}$ tale che $x^n F = 0$ per un qualche intero positivo n. Dimostrare che F "ha supporto in 0", vale a dire dimostrare che se $f \in \mathcal{K}$ è nulla al di fuori di un intervallo chiuso che non contiene l'origine, allora $F(f) = 0$.

Soluzione. Spiego a voce a chi è interessato.