Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2

Filippo Cesi – 2013–14

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt[1]). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n \, z^{3n} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} \, z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt[6]{2}$. (b) 1.

(2) (6 pt). Sia $z = i\sqrt{3} - 1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \quad \mathrm{Re}(z^{10}) \qquad\qquad (b) \quad |(-i)^z| \qquad\qquad (c) \quad \mathrm{Arg}(z^i)$$

Risp: (a) $-2^9 = -512$. (b) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (c) $\log 2$.

(3) (8 pt). Calcolare

$$(a) \quad \int_{|z-1/2|=1} \frac{z\, dz}{\sin^2(\pi z)} \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z|=2} \frac{z^3 \left(z^2 + 3z + 1\right)}{z^5 + 1} \, dz \, .$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z}{\sin^2(\pi z)} \, .$$

Il denominatore si annulla per

$$\pi z = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

vale a dire per

$$z \in \mathbb{Z} \, .$$

Gli unici zeri del denominatore che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$z_1 = 0 \qquad\qquad z_2 = 1 \, .$$

Poichè la funzione $\sin(\pi z)$ ha zeri semplici, ottengo che le singolarità di f sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \qquad\qquad && \text{polo di ordine 1} \\ z_2 &= 1 && \text{polo di ordine 2} \, . \end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Laurent nell'intorno di ciascun polo, ottengo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi^2 z} + \mathcal{O}\left(z^1\right) \\ f(z) &= \frac{1}{\pi^2 (z-1)^2} + \frac{1}{\pi^2 (z-1)} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left((z-1)^1\right) \, . \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1/2|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + Res(f,1)\right) = 2\pi i \frac{2}{\pi^2} = \frac{4i}{\pi} \, .$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z^3 \left(z^2 + 3z + 1\right)}{z^5 + 1} \, .$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big]$$

Si ha

$$g(z) := \frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{z^2}\frac{\big(1/z^2+3/z+1\big)}{z^3\,(1/z^5+1)} = \frac{\big(1+3z+z^2\big)}{z^2\,(z^5+1)}$$

La funzione $g(z)$ ha un polo di ordine 2 in $z=0$. Per calcolare il residuo in questo punto sviluppo in serie di Laurent

$$g(z) = \frac{1+3z+z^2}{z^2}\,(1+\mathcal{O}(z^5)) = \left(\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}+1\right)\,(1+\mathcal{O}(z^5)) = \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}+\mathcal{O}(1)\,.$$

Ottengo dunque

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot 3 = 6\pi i\,.$$

(4) (6 pt). Calcolare il seguente integrale, esprimendo il risultato in forma esplicitamente reale

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/4}\,dx}{x^2+6x+12}\,.$$

Risp: $\frac{2\sqrt[4]{2}\pi}{\sqrt[8]{3}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(5) (5 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra.

(6) (5 pt). Sia $F(x)=\sin(|x|)$, Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F''+F$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} D(\sin|x|) &= \cos(|x|)\,\mathrm{sgn}(x) = \cos(x)\,\mathrm{sgn}(x) \\ D^2(\sin|x|) &= -\sin x\,\mathrm{sgn}(x) + 2\cos x\delta_0 = -\sin(|x|)+2\delta_0\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$F''+F = 2\delta_0\,.$$

(7) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2}\,dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \cos(\pi x/2)$ si annulla nei punti

$$\cos(\pi x/2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_k := 2k+1 \;\text{ con } k\in\mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = \left|-\frac{\pi}{2}\,\sin\left(\frac{\pi x_k}{2}\right)\right| = \left|\frac{\pi}{2}\sin(k\pi+\pi/2)\right| = \frac{\pi}{2}\,,$$

si ottiene

$$\delta(\cos(\pi x/2)) = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\kappa+1}\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-x_k)}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x_k^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(8) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = x\,e^{-|2x+1|} \qquad\qquad (b)\quad xe^{-x^2+5ix}\,.$$

(a)

Soluzione. Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{2}{1+\lambda^2} \\
[x \to 2x+1] & e^{-|2x+1|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{i\lambda/2}}{1+\lambda^2/4} = \dfrac{4e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2} \\
[f(x) \to xf(x)] & xe^{-|2x+1|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\dfrac{4e^{i\lambda/2}}{4+\lambda^2}\right] \\
 & xe^{-|2x+1|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{e^{i\lambda/2}(8+8i\lambda+2\lambda^2)}{(4+\lambda^2)^2}
\end{array}$$

(b)

Soluzione. Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-s^2/4} \\
[f(x) \to xf(x)] & x\,e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\sqrt{\pi}e^{-s^2/4}\right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}se^{-s^2/4} \\
[f(x) \to e^{5ix}f(x)] & x\,e^{-x^2+5ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}(s-5)e^{-(s-5)^2/4}
\end{array}$$

(9) (5 pt). Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, limitata e continua a tratti. Assumendo che valga

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\operatorname{sinc}(x-t)\,dt = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad ①$$

cosa posso concludere sulla trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f?

Soluzione. La condizione ① può essere scritta come

$$f * \operatorname{sinc} = f.$$

Facendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri ottengo

$$\widehat{f}(\lambda)\ \mathrm{rect}(\lambda/2\pi) = \widehat{f}(\lambda) \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \tag{②}$$

vale a dire, usando la definizione della funzione rect(),

$$\begin{aligned} &\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) && \forall\lambda \in [-\pi, \pi] \\ &\widehat{f}(\lambda) = 0 && \forall\lambda \in \mathbb{R}\backslash[-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

La prima condizione non dà alcuna informazione, mentre la seconda ci dice che il supporto di $\widehat{f}$ è contenuto nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.