# Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3

Filippo Cesi – 2013–14

| | |
|---|---|
| Nome | |
| Cognome | |

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

| | | |
|---|---|---|
| 6 CFU | 8 CFU | 4 + 6 CFU |
| altro: | | |

| problema | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| test | |
| totale | |
| voto in trentesimi | |

**Regolamento:**

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1+3i)^n z^n \,.$$

*Risp:* (a) 1/4. (b) $1/\sqrt{10}$.

(2) (8 pt). Calcolare

$$(a) \quad \int_{|z-1|=2} \frac{1+e^z}{z\,\sin(\pi z/2)}\,dz \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z|=1} \frac{z\,\exp(1/z)}{1+2z}\,dz\,.$$

*Schema di soluzione.* (a) Sia

$$f(z) := \frac{1+e^z}{z\,\sin(\pi z/2)}\,.$$

Le singolarità di $f$ che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{aligned} &z = 0 && \text{polo di ordine 2} \\ &z = 2 && \text{polo di ordine 1}\,. \end{aligned}$$

La parte singolare dello sviluppo di $f$ nell'intorno delle singolarità è data da

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{4}{\pi z^2} + \frac{2}{\pi z} + \mathcal{O}(1) && z_0 = 0 \\ f(z) &= -\frac{1+e^2}{\pi(z-2)} + \mathcal{O}(1) && z_0 = 2\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,2)\right] = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1+e^2}{\pi}\right) = 2i\left(1-e^2\right)\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z\,\exp(1/z)}{1+2z}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito.

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}\frac{z^{-1}e^z}{1+2/z} = \frac{e^z}{z^2(z+2)} = \frac{1+z+\mathcal{O}(z^2)}{2z^2(1+z/2)} \\ &= \frac{1+z+\mathcal{O}(z^2)}{2z^2}\left(1 - \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right) \\ &= \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z} + \mathcal{O}(1)\,. \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

Quindi

$$\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),0\Big] = \frac{1}{4}.$$

e dunque

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{i\pi}{2}.$$

(3) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x\,dx}{x^2-2x+5}$$

*Schema di soluzione.* (a). Sia $\gamma_R = [-R,R] + C_R^+$ in cui $C_R^+(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x\,dx}{x^2-2x+5} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Im} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+5} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Im}\left[2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+2i)\right] = \frac{\pi}{2e^2}\sin(1).$$

(4) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = xe^{-|2x-3|} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{x^2}{(1+4x^2)^2}.$$

*Soluzione.* Partendo da una coppia nota $f$, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{2}{1+\lambda^2} \\
[x \to 2x-3] & e^{-|2x-3|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-i3\lambda/2}}{1+\lambda^2/4} = \dfrac{4e^{-3i\lambda/2}}{4+\lambda^2} \\
[f(x) \to xf(x)] & xe^{-|2x-3|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\dfrac{4e^{-i3\lambda/2}}{4+\lambda^2}\right] \\
 & xe^{-|2x-3|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2e^{-\frac{3i\lambda}{2}}\dfrac{3\lambda^2-4i\lambda+12}{(\lambda^2+4)^2}
\end{array}$$

(a) Partendo da una coppia nota $f$, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{1+4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2}e^{-|\lambda/2|} = \dfrac{\pi}{2}e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to f'(x)] & -\dfrac{8x}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi\lambda}{2}e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to -\frac{x}{8}f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{8}iD\Big(\dfrac{i\pi\lambda}{2}e^{-|\lambda|/2}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{16}e^{-|\lambda|/2}\Big(1-\dfrac{|\lambda|}{2}\Big).
\end{array}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda\,\mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(5) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di $x$, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad $x$).

$$(a) \quad D^2\big(e^{-|x|}\big) \qquad\qquad\qquad (b) \quad D\,\lfloor x^3 \rfloor\,.$$

*Soluzione.* (a) Si ha

$$D^2\big(e^{-|x|}\big) = -D\big(e^{-|x|}\,\mathrm{sgn}(x)\big) = e^{-|x|} - 2e^{-|x|}\delta_0 = e^{-|x|} - 2\delta_0\,.$$

(b) La funzione $\lfloor x^3 \rfloor$ è costante a tratti con salti di entità $+1$ nei punti 0 e $\pm\sqrt[3]{k}$, con $k = 1, 2, 3, \ldots$. Quindi

$$D\,\lfloor x^3 \rfloor = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\delta_{-\sqrt[3]{k}} + \delta_{\sqrt[3]{k}}\Big)\,.$$

(6) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/2)\,\delta(2x^2 - 5x + 2)\,dx\,.$$

*Soluzione.* La funzione $b(x) := 2x^2 - 5x + 2$ si annulla nei punti

$$x_1 = 1/2 \qquad x_2 = 2\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 4x - 5 \qquad\qquad |b'(1/2)| = 3 \qquad\qquad |b'(2)| = 3$$

da cui si ottiene

$$\delta(2x^2 - 5x + 2) = (\delta_{1/2} + \delta_2)/3\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/2)\,\delta(x^2 - 5x + 4)\,dx &= \frac{1}{3}\big[\delta_{1/2}(\cos(x\pi/2)) + \delta_2(\cos(x\pi/2))\big] \\ &= \frac{1}{3}\big(\cos(\pi/4) + \cos(\pi)\big) = \frac{\sqrt{2} - 2}{6}\,.\end{aligned}$$

(7) (6 pt). Fare un esempio di una distribuzione $F$ tale che $F(e^{-x^2}) = 1$ e $F(p(x)) = 0$ per ogni polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale a 4.

*Soluzione.* Spiego a voce a chi è interessato.

(8) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla formula integrale di Cauchy (nella versione più generale che conoscete).