Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2014–15

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (1 pt[1]). Scrivere sul frontespizio nome e cognome in stampatello, nelle apposite caselle. Ripeto, in stampatello.

(2) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza[2]

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (2-i)^n \, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^2} \, z^n \, .$$

Soluzione. (a) Poichè

$$|a_n|^{1/n} = \left|n^2 (2-i)^n\right|^{1/n} = n^{2/n} \, |2-i| = n^{2/n} \sqrt{5} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{5} \, ,$$

si ha $R = 1/\sqrt{5}$.

(b) Usando la formula di Stirling ottengo

$$\begin{aligned} |a_n|^{1/n} = \left| \frac{e^{n^2}}{(n!)^2} \right|^{1/n} &= \frac{e^n}{\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)\right)^{2/n}} \\ &= \frac{e^n}{n^2 e^{-1} \left(\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)\right)^{2/n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \, . \end{aligned}$$

Quindi $R = 0$.

(3) (6 pt). Sia $z = \sqrt{3} - i$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a) \quad |(1+i)^z| \qquad\qquad (b) \quad \mathrm{Re}(z^{-i})$$

Risp: (a) $\exp[\frac{1}{2}\sqrt{3}\log 2 + \pi/4]$. (b) $e^{-\pi/6} \cos \log 2$.

(4) (6 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 \, \sin z} \, .$$

Risp: $1/z^2 + 1/(2z)$.

(5) (6 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 \, (\cos(\pi z) + 1)} \, .$$

Schema di soluzione. Poichè f è il quoziente di 2 funzioni intere, le sue singolarità sono gli zeri del denominatore. Essi sono dati da

$$\begin{aligned} &z = 0 && \text{molteplicità } 2 \\ &z = 1 + 2k, \ k \in \mathbb{Z} && \text{molteplicità } 2 \, . \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi
[2] se la risposta non è un numero reale venite squalificati per 3 anni.

Il numeratore ha i seguenti zeri

$$z = 1,\ z = 2 \qquad\qquad \text{molteplicità } 1\,.$$

Combinando queste informazioni otteniamo che le singolarità di f sono

$z = 0$	polo di ordine 2
$z = (1 + 2k),\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$	polo di ordine 2
$z = 1$	polo di ordine 1 .

(6) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{e^{2z}\,(z-\pi)}{z\,\sin z}\,dz\,.$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{e^{2z}\,(z-\pi)}{z\,\sin z}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$z = 0$	polo di ordine 2
$z = +\pi$	eliminabile
$z = -\pi$	polo di ordine 1 .

Quindi

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = 2\pi i\,\big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-\pi)\big] = 2\pi i\,\big[(1-2\pi) - 2e^{-2\pi}\big]\,.$$

(7) (7 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{z^3\left(z^2+3z+1\right)}{(z^5+1)(2z-3)}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z^3\left(z^2+3z+1\right)}{(z^5+1)(2z-3)}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=4} f(z)\,dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big]$$

Si ha

$$g(z) := \frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{z^2}\,\frac{\left(1/z^2 + 3/z + 1\right)}{z^3\,(1/z^5+1)\,(2/z-3)} = \frac{\left(1+3z+z^2\right)}{z(z^5+1)(2-3z)}$$

La funzione $g(z)$ ha un polo di ordine 1 in $z = 0$ e si ha

$$\mathrm{Res}(g,0) = \lim_{z\to 0}(zg(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{1+3z+z^2}{(z^5+1)(2-3z)} = \frac{1}{2}\,.$$

Ottengo dunque

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = i\pi\,.$$

(8) (7 pt). Sia $f(z)$ una funzione intera che non si annulla mai, ad eccezione del punto $z = -1$ che rappresenta uno zero semplice di f e sia

$$g(z) = \frac{e^{z^2}}{f(z^3)}.$$

Supponendo di sviluppare g in serie di Taylor con centro nel punto 2

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-2)^n$$

determinare il raggio di convergenza R di questa serie di potenze.

Soluzione. Poichè e^{z^2} non si annulla mai, la funzione g è analitica su tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione di quei punti in cui si annulla il denominatore. Sia quindi

$$X := \{z \in \mathbb{C} : f(z^3) = 0\}.$$

Il raggio di convergenza della serie di Taylor con centro in $z = 2$ è dato quindi dalla distanza fra 2 e X. Determino quindi X. Imponendo $f(z^3) = 0$, vale a dire $z^3 = -1$, ottengo

$$X = \{z_0, z_1, z_2\} \qquad \text{in cui } z_k = e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)}.$$

Disegnando z_0, z_1 e z_2 sul piano complesso, si capisce che i punti più vicini a 2 sono z_0 e z_2 che sono equidistanti da 2. Poichè

$$z_0 = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} R = \operatorname{dist}(2, X) = |2 - z_0| &= \left|2 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\,|3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra.