Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2014–15

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare il seguente integrale, esprimendo il risultato in forma *eplicitamente reale*

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2-6x+12}\,dx\,.$$

Risp: $2^{3/4}\,3^{-3/8}\pi\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)$.

(2) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\quad D^3\big((1+x)^2\delta_0^{(3)}\big) \qquad\qquad (b)\quad D\big[\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor\big]\,.$$

Soluzione. (a) Sia $h(x) := (1+x)^2$. Allora

$$\begin{aligned} h(x)\delta_0^{(3)} &= h(0)\,\delta_0^{(3)} - 3h'(0)\,\delta_0'' + 3h''(0)\,\delta_0' - h'''(0)\,\delta_0 \\ &= \delta_0^{(3)} - 6\,\delta_0'' + 6\,\delta_0'\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$D^3\big((1+x)^2\delta_0^{(3)}\big) = \delta_0^{(6)} - 6\,\delta_0^{(5)} + 6\,\delta_0^{(4)}\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} D[\cos(\pi x)\,\lfloor x\rfloor] &= -\pi\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor + \cos(\pi x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = -\pi\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\cos(k\pi)\,\delta_k \\ &= -\pi\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\,\delta_k \end{aligned}$$

(3) (7 pt). Sia $F(x) := H(x)e^{-x}$ in cui H è la funzione a gradino di Heaviside. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $F''' + F''$, semplificando il più possibile il risultato.

Soluzione. Si vede che vale

$$D^kF(x) = (-1)^k\Big[F(x) - \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\delta_0^{(j)}\Big]$$

Quindi

$$(F''' + F'')(x) = (-1)\Big[F(x) - \delta_0 + \delta_0' - \delta_0''\Big] + \Big[F(x) - \delta_0 + \delta_0'\Big] = \delta_0''\,.$$

(4) (9 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,e^{-x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,e^{-x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty [a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)] \qquad x\in[-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty \big[|a_k|^2 + |b_k|^2\big]$.

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x=0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + 0\right) = \frac{e^{-\pi}}{2} \, .$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned} \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2x} \, dx = \frac{e^{-2x}}{2\pi}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right) \, . \end{aligned}$$

(5) (10 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1 + a^2x^2)^2} \qquad (a > 0) \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \frac{1}{(2x + i)^2}$$

Soluzione. (a). Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x \to ax] & \dfrac{1}{1+a^2x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a} e^{-|\lambda/a|} = \dfrac{\pi}{a} e^{-|\lambda|/a} \\
[f(x) \to f'(x)] & -\dfrac{2a^2x}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi}{a} \lambda e^{-|\lambda|/a} \\
[f(x) \to -\dfrac{x}{2a^2} f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{2a^2} i D\Big(\dfrac{i\pi}{a} \lambda e^{-|\lambda|/a}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2a^3} e^{-|\lambda|/a}\Big(1 - \dfrac{|\lambda|}{a}\Big) \, .
\end{array}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda \,\mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(b). Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\, e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[\mathcal{F} = (2\pi)(\mathcal{F}^{-1} \circ P)] & \dfrac{1}{1+ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(-\lambda)\, e^{\lambda} \\
[x \to (-x)] & \dfrac{1}{1-ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[f \to (-i)f] & \dfrac{1}{x+i} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\, 2i\pi H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[f \to -f'] & \dfrac{1}{(x+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\, 2\pi\lambda H(\lambda)\, e^{-\lambda} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{(2x+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\, \dfrac{\pi}{2} H(\lambda)\, \lambda\, e^{-\lambda/2}
\end{array}$$

(6) (6 pt). Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia

$$I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ix}\, \delta\big((x^2-a^2)\, e^{-x^2}\big)\, dx\,.$$

Calcolare il massimo della funzione $f(a) := |aI(a)|$ per $a \in (0,\infty)$.

Soluzione. La funzione $b(x) := (x^2-a^2)\, e^{-x^2}$ si annulla nei punti

$$x = \pm a\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = e^{-x^2}\big(2x - 2x(x^2-a^2)\big) \qquad\qquad |b'(\pm a)| = 2ae^{-a^2}\,,$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{e^{a^2}}{2a}(\delta_a + \delta_{-a})\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+ix}\, \delta\big((x^2-a^2)\, e^{-x^2}\big)\, dx = \frac{e^{a^2}}{2a}\left[e^{-a^2+ia} + e^{-a^2-ia}\right] = \frac{\cos(a)}{a}\,.$$

Otteniamo così che la funzione $f(a) = |aI(a)| = |\cos(a)|$ ha come valore massimo 1.

(7) (6 pt). Si consideri lo spazio delle funzioni di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ con il prodotto scalare canonico $\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$. Sia $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ di norma unitaria

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1$$

e sia $\varphi(\lambda) := \mathcal{F}(\psi)(\lambda)/\sqrt{2\pi}$. Si assuma inoltre che valgano le condizioni

$$\int_{\mathbb{R}} x\,|\psi(x)|^2\, dx = 0 \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}} \lambda\,|\varphi(\lambda)|^2\, d\lambda = 0\,. \tag*{①}$$

Interpretando $|\psi(x)|^2$ e $|\varphi(\lambda)|^2$ come densità di probabilità, le ① affermano che le variabili x e λ hanno media nulla. Per questo motivo, le rispettive varianze sono date da

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\,|\psi(x)|^2\, dx = \|x\psi\|^2 \qquad\qquad \sigma_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\,|\varphi(\lambda)|^2\, d\lambda = \|\lambda\varphi\|^2\,.$$

Dimostrare che vale il *principio di indeterminazione*: $\sigma_x\,\sigma_\lambda \geq 1/2$.

[Sugg: usando le proprietà della trasformata di Fourier, dimostrare che $\|\lambda\varphi\|^2 = \|\psi'\|^2$. Questo fatto, insieme alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, implica che $\sigma_x^2\sigma_\lambda^2 \geq |\langle x\psi, \psi'\rangle|^2 \ldots$].

Scrivere tutti i passaggi in forma estremamente chiara.