Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2014–15

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	6 CFU	8 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt[1]). Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n\,(3+i)^n\, z^{2n} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (\log n)^4\, z^n$$

Risp: (a) $1/\sqrt[4]{10}$. (b) 1.

(2) (6 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z-2i|=2.5} \frac{1+z^2}{z\,(e^{\pi z}+1)}\,dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=5} \frac{z^2\,(z^2-z+1)}{z^4+2}\,dz\,.$$

Risp: (a) $16/3+i\pi$. (b) $-2\pi i$ (metodo del residuo all'infinito).

(3) (5 pt) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2+2x+3}\,.$$

Risp: $-e^{-\sqrt{2}}\pi\sin(1)/\sqrt{2}$.

(4) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3\big(|4-x^2|\big)$$

Soluzione. Si ha

$$|4-x^2| = (4-x^2)\ \mathrm{sgn}(4-x^2)\,.$$

Poichè $D\,\mathrm{sgn}(4-x^2) = 2(\delta_{-2}-\delta_2)$, ottengo

$$\begin{aligned} D^3\big(|4-x^2|\big) &= D^2\big[-2x\ \mathrm{sgn}(4-x^2) + (4-x^2)\,2(\delta_{-2}-\delta_2)\big] \\ &= 2\,D^2\big[-x\ \mathrm{sgn}(4-x^2) + (4-x^2)\,(\delta_{-2}-\delta_2)\big] \\ &= -2\,D^2\big[x\ \mathrm{sgn}(4-x^2)\big] \\ &= -2\,D\big[\mathrm{sgn}(4-x^2) + 2x\,(\delta_{-2}-\delta_2)\big] \\ &= -2\,D\big[\mathrm{sgn}(4-x^2) - 4(\delta_{-2}+\delta_2)\big] \\ &= 4\,(\delta_2-\delta_{-2}) + 8(\delta'_{-2}+\delta'_2)\,. \end{aligned}$$

(5) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/4)\,\delta(x^2-5x+4)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^2-5x+4$ si annulla nei punti

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 2x-5 \qquad\qquad |b'(1)| = 3 \qquad\qquad |b'(4)| = 3$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

da cui si ottiene

$$\delta(x^2 - 5x + 4) = (\delta_1 + \delta_4)/3\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/4)\,\delta(x^2 - 5x + 4)\,dx = \frac{1}{3}\big[\delta_1(\cos(x\pi/4)) + \delta_4(\cos(x\pi/4))\big]$$
$$= \frac{1}{3}\big(\cos(\pi/4) + \cos(\pi)\big) = \frac{\sqrt{2} - 2}{6}\,.$$

(6) (6 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,e^{-x^2}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside:

$$H(x)\,e^{-x^2} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[|a_k|^2 + |b_k|^2\big]$.

Schema di soluzione. Sfruttando il teorema della convergenza puntuale, ottendo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}\,(1 + 0) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{1}{2}\,(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi^2} + 0\right) = \frac{1}{2} e^{-\pi^2}\,.$$

Dall'identità di Parseval si ha

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[|a_k|^2 + |b_k|^2\big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2x^2}\,dx\,.$$

(7) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} \qquad\qquad (b)\quad x e^{-x^2 + 5ix}\,.$$

Soluzione. (a) Posso scrivere

$$f(x) = e^{ix} g(x+1) \quad \text{in cui} \quad g(x) := \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[e^{ix} g(x+1)](\lambda) = \mathcal{F}[g(x+1)](\lambda - 1) = e^{i(\lambda-1)}\,\hat{g}(\lambda - 1) = \pi\,e^{-|\lambda-1| + i(\lambda-1)}\,.$$

(b) Risp: $-i\sqrt{\pi}/2\,e^{-\frac{1}{4}(t-5)^2}(t - 5)$.

(8) (5 pt). Dimostrare che l'indice di un cammino rispetto a un punto nel piano complesso è un numero intero.

(9) (5 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{\sin z\,(z^3 + 9z)}{z^3\,(e^{\pi z} + 1)^2}$$

Schema di soluzione. Poichè f è il quoziente di 2 funzioni intere, le sue singolarità sono gli zeri del denominatore. Il denominatore ha i seguenti zeri

$$\begin{aligned} &z = 0 && \text{molteplicità } 3 \\ &z = i(1+2k) && \text{molteplicità } 2\,. \end{aligned}$$

Il numeratore può essere scritto come $\sin z\, z\,(z^2+9)$, quindi ha i seguenti zeri in corrispondenza degli zeri del denominatore

$$\begin{aligned} &z = 0 && \text{molteplicità } 2 \\ &z = \pm 3 && \text{molteplicità } 1\,. \end{aligned}$$

Combinando queste informazioni otteniamo che le singolarità di f sono

$$\begin{aligned} &z = 0 && \text{polo di ordine } 1 \\ &z = i(1+2k),\;\; k \notin \{-2, 1\} && \text{polo di ordine } 2 \\ &z = \pm 3i && \text{polo di ordine } 1\,. \end{aligned}$$

(10) (5 pt). Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.