Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3

Filippo Cesi – 2014–15

Nome	
Cognome	

Devo verbalizzare questo esame come (fare una croce):

9 CFU	8 CFU	6 CFU
altro:		

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (3-i)^n z^n\,.$$

Risp: (a) 1/4. (b) $1/\sqrt{10}$.

(2) (8 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z-1/2|=3/2} \frac{3z-1}{2\cos(\pi z)-1}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=3} \frac{z^3\left(z^2-3z+1\right)}{(z-1)^2\,(z^3+2)}\, dz$$

Schema di soluzione. (a) Le singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$z=-1/3$	polo semplice	$\text{Res} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}\pi}$
$z=+1/3$	eliminabile	$\text{Res} = 0$
$z=+5/3$	polo semplice	$\text{Res} = \dfrac{4}{\sqrt{3}\pi}$

Risultato

$$I = 2\pi i\left(-\frac{2}{\sqrt{3}\pi} + \frac{4}{\sqrt{3}\pi}\right) = \frac{4i}{\sqrt{3}}\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z^3\left(z^2-3z+1\right)}{(z-1)^2\,(z^3+2)}$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. In questo modo si ottiene

$$\int_{|z|=3} f(z)\, dz = -2\pi i\,\text{Res}(f,\infty) = 2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

Si ha

$$g(z) := \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-3z+1}{z^2(z-1)^2\,(2z^3+1)}\,.$$

Sviluppando la funzione $g(z)$ in serie di Laurent in $z=0$ ottengo

$$g(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1)\,.$$

Quindi

$$\int_{|z|=3} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

(3) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/4}}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}\, dx\,.$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{[z^{3/4}]^+}{z^2 - 2\sqrt{3}z + 4}$$

in cui $[z^\alpha]^+$ denota il ramo "+" di z^α, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{3/4}}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}\, dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i3\pi/2}}\left[\mathrm{Res}(f, \sqrt{3}+i) + \mathrm{Res}(f, \sqrt{3}-i)\right] \\
&= \frac{2\pi i}{1 - e^{i3\pi/2}}\,\frac{\left[(\sqrt{3}+i)^{3/4}\right]^+ - \left[(\sqrt{3}-i)^{3/4}\right]^+}{2i} \\
&= \frac{2\pi i\, 2^{3/4}}{1 - e^{i3\pi/2}}\,\frac{e^{i\pi/8} - e^{i11\pi/8}}{2i} = \frac{\pi\, 2^{3/4}}{1 - e^{i3\pi/2}}\left(e^{i\pi/8} - e^{i11\pi/8}\right) \\
&= \pi\, 2^{5/4}\cos(\pi/8)
\end{aligned}$$

(4) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = xe^{-4x^2+7ix} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{1}{(3x+4i)^2}\,.$$

Risp: (a) $-\frac{i\sqrt{\pi}}{16}(\lambda - 7)\exp\left[-(\lambda-7)^2/16\right]$. (b) $-\frac{2\pi}{9}H(\lambda)\lambda\exp\left[-4\lambda/3\right]$.

(5) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\quad D^3\left((1+e^x)^2\,\delta_0''\right) \qquad\qquad (b)\quad D^2\left(|\cos x|\right)\,.$$

Risp: (a) $6\delta_0^{(3)} - 8\delta_0^{(4)} + 4\delta_0^{(5)}$. (b) $-|\cos x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{(k+1/2)\pi}$.

(6) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi x)\,\delta\left((x^2-1)(e^x-1)\right)\,dx\,.$$

Soluzione. Sia $b(x) := (x^2-1)\,(e^x-1)$. La funzione b si annulla in $x=0$ e $x=\pm1$. Inoltre

$$b'(x) = 2x\,(e^x-1) + (x^2-1)e^x = e^x\left(x^2+2x-1\right) - 2x\,.$$

Dunque

$$|b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(1)| = 2(e-1) \qquad\qquad |b'(-1)| = 2(1-1/e) = \frac{e-1}{e}\,.$$

Per definizione di funzione composta della delta di Dirac, otteniamo

$$\delta(b(x)) = \frac{\delta_0}{|b'(0)|} + \frac{\delta_1}{|b'(1)|} + \frac{\delta_{-1}}{|b'(-1)|} = \delta_0 + \frac{\delta_1}{2(e-1)} + \frac{e}{2(e-1)}\delta_{-1}\,.$$

In questo modo si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta((x-1)(e^x-1))\, dx = \cos(0) + \frac{1}{2(e-1)}\cos(\pi) + \frac{e}{2(e-1)}\cos(-\pi)$$
$$= 1 - \frac{e+1}{2(e-1)} = \frac{e-3}{2(e-1)}\,.$$

(7) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla formula integrale di Cauchy (nella versione più generale che conoscete).

(8) (6 pt). Sia n un intero positivo. La funzione $f(z) = 1/(z^n+1)^2$ ha n poli di ordine 2 nei punti

$$z_k = \exp\Big[\frac{i\pi}{n}(1+2k)\Big] \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Dimostrare che esiste una funzione $g(n)$ tale che il residuo di f in z_k può essere espresso come

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = g(n)\, z_k\,.$$

Determinare $g(n)$.

Risp: $g(n) = -(n-1)/n^2$.