Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2015–16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(x^2+4)^2}\, dx\,.$$

Risp: $\frac{3\pi}{16e^2}$

(2) (10 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\ \ D^3\big((1+x)e^{-x^2}\delta_0''\big) \qquad\qquad (b)\ \ D^2\left[\,\big|1-|x|\,\big|\,\right]\,.$$

(a)

Risp: $-2\delta_0^{(3)} - 2\delta_0^{(4)} + \delta_0^{(5)}$.

(b)

Soluzione. Si ha

$$\big|1-|x|\,\big| = \big(1-|x|\big)\ \mathrm{sgn}(1-|x|)$$

Poichè

$$\mathrm{sgn}(1-|x|) = \begin{cases} +1 & x\in[-1,1] \\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

derivando si ottiene

$$D\,\mathrm{sgn}(1-|x|) = 2(\delta_{-1}-\delta_1)\,,$$

quindi

$$D\big|1-|x|\,\big| = -\,\mathrm{sgn}\,x\ \mathrm{sgn}(1-|x|) + 2(1-|x|)(\delta_{-1}-\delta_1) = -\,\mathrm{sgn}\,x\ \mathrm{sgn}(1-|x|)\,.$$

Poichè

$$-\,\mathrm{sgn}\,x\ \mathrm{sgn}(1-|x|) = \begin{cases} -1 & x\in(-\infty,-1) \\ +1 & x\in[-1,0) \\ -1 & x\in[0,1] \\ +1 & x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

derivando ancora otteniamo

$$D^2\big|1-|x|\,\big| = -D\big[\mathrm{sgn}\,x\ \mathrm{sgn}(1-|x|)\big] = 2(\delta_{-1}-\delta_0+\delta_1)\,.$$

(3) (7 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,(2-x^2)$

$$H(x)\,(2-x^2) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right] \qquad x\in[-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(2+0) = 1\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(2 - \pi^2 + 0\right) = 1 - \frac{\pi^2}{2}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned}\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2 - x^2)^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x^4 - 4x^2 + 4)\, dx = \frac{\pi^4}{5} - \frac{4\pi^2}{3} + 4\,.\end{aligned}$$

(4) (10 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = x^2 e^{-x^2 + i4x} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = H(x - \pi/2)\, e^{-x(1+2i)}$$

Risp: (a) $-\frac{1}{4}\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(\lambda-4)^2}\left(\lambda^2 - 8\lambda + 14\right)$. (b) $\dfrac{ie^{-\pi/2(1+i\lambda)}}{\lambda + 2 - i}$.

(5) (7 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (fornire, se possibile, una risposta numerica)

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-|x|}\, \delta\Big(\sin\Big(\frac{\pi x}{4}\Big)\Big)\, dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \sin(\pi x/4)$ si annulla nei punti

$$x_k = 4k \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = |\pi/4 \cos(\pi x_k/4)| = \frac{\pi}{4}$$

si ottiene

$$\delta(\sin(\pi x/4)) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{4k}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-|x|}\, \delta(\sin(\pi x/4))\, dx &= \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-|4k|} \\ &= \frac{4}{\pi}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4k}} - 1\right] = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{1 - \frac{1}{16}} - 1\right] = \frac{68}{15\pi}\,.\end{aligned}$$

(6) (6 pt). Calcolare il seguente integrale, esprimendo il risultato in funzione della funzione gamma

$$\int_0^\infty \cos(x^4)\,dx\,.$$

[Sugg: integrare la funzione e^{iz^4} lungo un cammino chiuso che va da 0 a R, poi percorre un arco di circonferenza di raggio R da $\vartheta = 0$ a $\vartheta = \pi/8$ e infine torna all'origine].

Soluzione. Sia $J(R) = \int_\gamma e^{iz^4}\,dz$, in cui γ è il cammino chiuso a forma di fetta di torta dato da

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3^{-1} \qquad \gamma_1 = [0, R] \qquad \gamma_2(t) = Re^{it},\ t \in [0, \pi/8] \qquad \gamma_3 = te^{i\pi/8},\ t \in [0, R]\,.$$

Denotando con $J_i(R) := \int_{\gamma_i} e^{iz^4}\,dz$, $i = 1, 2, 3$, ottengo

$$J_1(R) = \int_0^R \left(\cos(x^4) + i\sin(x^4)\right)\,dx\,.$$

Per quanto riguarda $J_2(R)$, si ha

$$\begin{aligned}
|J_2(R)| &= \left|\int_0^{\pi/8} \exp\left[i\left(Re^{it}\right)^4\right] iRe^{it}\,dt\right| \\
&\le \int_0^{\pi/8} \left|\exp\left[iR^4e^{i4t}\right]\right| Rdt \\
&= R\int_0^{\pi/8} \exp\left[\mathrm{Re}\left(iR^4e^{i4t}\right)\right]dt \\
&= R\int_0^{\pi/8} \exp\left[-R^4\sin(4t)\right]dt \\
&= \frac{R}{4}\int_0^{\pi/2} \exp\left[-R^4\sin s\right]ds \\
&\le \frac{R}{4}\frac{\pi}{2R^4} = \frac{\pi}{8R^3}\,. \qquad\qquad \text{uso } \int_0^{\pi/2} e^{-a\sin t}\,dt \le \frac{\pi}{2a} \text{ se } a > 0
\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{R\to+\infty} J_2(R) = 0$. Infine

$$\begin{aligned}
J_3(R) &= \int_0^R \exp\left[i\left(te^{i\pi/8}\right)^4\right] e^{i\pi/8}\,dt \\
&= \int_0^R \exp\left[it^4e^{i\pi/2}\right] e^{i\pi/8}\,dt \\
&= e^{i\pi/8}\int_0^R \exp\left[-t^4\right]\,dt \\
&= e^{i\pi/8}\int_0^R e^{-s}\,\frac{s^{-3/4}}{4}\,ds \qquad\qquad [\,s = t^4\,]
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{R\to+\infty} J_3(R) = \frac{e^{i\pi/8}}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = e^{i\pi/8}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

in cui ho usato $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

Poichè e^{iz^4} è intera, $J(R) = 0$ per ogni $R > 0$. Quindi

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{R\to\infty} J(R) = \lim_{R\to\infty} \left(J_1(R) + J_2(R) - J_3(R)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(J_1(R) + J_2(R) - J_3(R)\right) \\
&= \int_0^\infty \big(\cos(x^4) + i\sin(x^4)\big)\, dx - e^{i\pi/8}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)
\end{aligned}$$

Prendendo la parte reale di questa uguaglianza si ottiene

$$\int_0^\infty \cos(x^4)\, dx = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\, \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\,.$$

(7) (6 pt). Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Dimostrare che $\check{\hat{f}} = f$.