Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1

Filippo Cesi – 2015–16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n!}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n\, z^{2n}$$

Soluzione. (a) Utilizzando la formula di Stirling si ottiene

$$|a_n|^{1/n} = \left(\frac{e^{n^2}}{n!}\right)^{1/n} = \frac{e^n}{ne^{-1}\sqrt{2\pi n}^{1/n}(1+\varepsilon_n)^{1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\,.$$

Quindi $R = 0$.

(b) Si ha

$$|a_n|^{1/(2n)} = |(1+i)^n|^{1/(2n)} = |1+i|^{1/2} = \sqrt[4]{2}\,.$$

Quindi $R = 2^{-1/4}$.

(2) (5 pt). Calcolare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent centrato in $z = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2\,(e^z - 1)^2}$$

Risp: $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \mathcal{O}\,(1)$.

(3) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1/2|=1} \frac{z\,dz}{\sin^2(\pi z)}$$

Risp: $2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)) = 2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{4i}{\pi}$.

(4) (5 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x\,dx}{x^2 - 2x + 5}$$

Risp: $\frac{\pi}{2e^2}\sin(1)$.

(5) (5 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Scrivere, oltre alla formula completa, lo sviluppo esplicito di f fino a $k = 4$, vale a dire

$$\begin{aligned} f(x) \sim \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + a_4 \cos(4x) \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \cdots \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{k^2\pi}\big[\cos(kx)\big]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}\big[\cos(k\pi)-1\big] = \frac{1}{k^2\pi}\big[(-1)^k-1\big]\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
a_{2k} = 0 \qquad\qquad a_{2k+1} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\,.
$$

Per quanto riguarda i b_k

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\sin(kx)\,dx\\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\\
&= -\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2\pi}\big[\sin(kx)\big]_0^{\pi} = -\frac{1}{k}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,.
\end{aligned}
$$

Posso quindi scrivere

$$
f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin(kx)\,.
$$

Lo sviluppo esplicito fino a $k=4$ è

$$
f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \cdots\,.
$$

(6) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier, riconducendosi se possibile a casi noti, della funzione

$$
f(x) = x\cos x\, e^{-4x^2}
$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$
\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}\\
[x\to 2x] & e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-s^2/16}\\
[f(x)\to xf(x)] & x\,e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-s^2/16}\right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{16}\,s\,e^{-s^2/16}\\
[f(x)\to \cos x\, f(x)] & x\,\cos x\, e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{32}\left[(s+1)e^{-(s+1)^2/16} + (s-1)e^{-(s-1)^2/16}\right]
\end{array}
$$

(7) (5 pt). Sia $F(x) = H(x)\,e^{-x^2/2}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside e sia $G = F'' + (1-x^2)F$, nel senso delle distribuzioni.

(a) Calcolare G.
(b) Calcolare $D^n G$ per n intero positivo arbitrario.

Risp: (a) δ_0'. (b) $\delta_0^{(n+1)}$.

(8) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2}\, dx$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \cos(\pi x/2)$ si annulla nei punti

$$\cos(\pi x/2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_k := 2k+1 \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = \left|-\frac{\pi}{2}\,\sin\left(\frac{\pi x_k}{2}\right)\right| = \left|\frac{\pi}{2}\sin(k\pi + \pi/2)\right| = \frac{\pi}{2}\,,$$

si ottiene

$$\delta(\cos(\pi x/2)) = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{x_k} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\kappa+1}\,.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\cos(\pi x/2))}{x^2}\, dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-x_k)}{x^2}\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x_k^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema di Morera.

(10) (6 pt). Sia H_n l'ennesimo polinomio di Hermite e sia ψ_n la corrispondente *funzione di Hermite* definita come

$$\psi_n(x) := C_n\, e^{-x^2/2} H_n(x) \qquad \text{in cui } C_n = (\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!)^{-1/2}.$$

Ricordando che vale la relazione

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\,, \qquad ①$$

si dimostri che ψ_n è un autofunzione dell'operatore trasformata di Fourier con autovalore $\sqrt{2\pi}(-i)^n$, vale a dire

$$\mathcal{F}[\psi_n] = \sqrt{2\pi}(-i)^n\, \psi_n\,. \qquad ②$$

[Sugg: Dalla ① segue che $\psi_{n+1} = [2(n+1)]^{-1/2}\,(x\psi_n - \psi_n')$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier si ottiene una relazione analoga fra $\hat{\psi}_{n+1}$ e $\hat{\psi}_n$. A questo punto è semplice dimostrare la ② per induzione].