Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2A

Filippo Cesi – 2015–16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n\, z^{2n}$$

Risp: (a) 1. (b) $1/\sqrt[4]{2}$.

(2) (5 pt). Calcolare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent centrato in $z = 0$

$$f(z) = \frac{z}{(\cos z - 1)^2}$$

Risp: $\frac{4}{z^3} + \frac{2}{3z} + \mathcal{O}\left(z^1\right)$.

(3) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{1}{\left(z^4-1\right)\left(z^2-1\right)}\, dz\,.$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{1}{\left(z^4-1\right)\left(z^2-1\right)}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{aligned} z &= 1 && \text{polo di ordine } 2 \\ z &= i && \text{polo di ordine } 1\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1-i|=2} f(z)\, dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,i)\right] = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} - \frac{i}{8}\right) = \frac{\pi}{4}\,(1-2i)\,.$$

(4) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{1/z}\,(z+2)}{z-3}\, dz\,.$$

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{e^{1/z}\,(z+2)}{z-3}\,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito. Ponendo

$$g(z) := \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z(2z+1)}{z^2-3z^3}\,,$$

si ottiene facilmente

$$\int_{|z|=5} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(g,0) = 12\pi i\,.$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

(5) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+2}\,dx$$

Sia γ il cammino chiuso a forma di "pacman" con la bocca coincidente con il semiasse reale positivo e sia

$$f(z) := \frac{\sqrt[4]{z}^{(+)}}{z^2+2z+2}$$

in cui $[\ ]^+$ indica che sto scegliendo il ramo + della radice, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo. Allora si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+2}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{i\pi/2}}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{1-e^{i\pi/2}}\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)\,,$$

in cui z_k sono le singolarità isolate di f. In questo caso ci sono due singolarità isolate

$$\begin{aligned} z_+ &= -1+i = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4} \\ z_- &= -1-i = \sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}\,. \end{aligned}$$

e sono entrambi poli semplici. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_+) &= \frac{[z_+^{1/4}]^+}{2i} = \frac{1}{2i}(\sqrt{2})^{1/4}e^{i3\pi/16} \\ \mathrm{Res}(f, z_-) &= \frac{[z_-^{1/4}]^+}{-2i} = -\frac{1}{2i}(\sqrt{2})^{1/4}e^{i5\pi/16} = \,. \end{aligned}$$

In questo modo si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{1/4}\,dx}{x^2+2x+2} &= \frac{2\pi i}{1-i}\,\frac{2^{1/8}}{2i}\left[e^{i3\pi/16} - e^{i5\pi/16}\right] \\ &= \frac{\pi\, 2^{1/8}}{1-i}\left[e^{i3\pi/16} - e^{i5\pi/16}\right] \\ &= \pi\, 2^{1/8}\frac{e^{-i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4}}\left[e^{i3\pi/16} - e^{i5\pi/16}\right] \\ &= \pi\, 2^{1/8}\frac{e^{-i\pi/16}-e^{i\pi/16}}{e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4}} \\ &= \pi\, 2^{1/8}\frac{\sin(\pi/16)}{\sin(\pi/4)} = 2^{5/8}\pi\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\,. \end{aligned}$$

(6) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier, riconducendosi se possibile a casi noti, della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+4x^2)^2}\,.$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di

Fourier, ottengo

$$
\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{1+4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda/2|} = \dfrac{\pi}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to f'(x)] & -\dfrac{8x}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2} \\
[f(x) \to -\dfrac{x}{8} f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{8} i D\Big(\dfrac{i\pi\lambda}{2} e^{-|\lambda|/2}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+4x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{16} e^{-|\lambda|/2}\Big(1 - \dfrac{|\lambda|}{2}\Big).
\end{array}
$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda \operatorname{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(7) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D\left[e^{|x|} D^2\big(x e^{-|x|}\big)\right]$$

Soluzione. Si ha

$$
\begin{aligned}
D^2\big(x\, e^{-|x|}\big) &= D\Big(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x + 1)\Big) = D\Big(e^{-|x|}(1-|x|)\Big) \\
&= e^{-|x|}\big[(|x|-1)\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} x)\big] = e^{-|x|}(x - 2\operatorname{sgn} x)\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$D\left[e^{|x|} D^2\big(x e^{-|x|}\big)\right] = D(x - 2\operatorname{sgn} x) = 1 - 4\delta_0\,.$$

(8) (5 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta((x^6-1)(e^x-1))\, dx\,.$$

Risp: $\dfrac{5e-7}{6(e-1)}$.

(9) (5 pt). Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ due funzioni che soddisfano la relazione $f''(x) = e^{5ix} g(2x)$ e siano $\hat{f}$ e $\hat{g}$ le trasformate di Fourier di f e g. Sapendo che

$$\hat{g}(\lambda) = \sin(\pi\lambda/4)\, e^{-\lambda^2} \qquad \text{per } \lambda \le 0\,,$$

quanto vale $\hat{f}(3)$?

Soluzione. Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della relazione $f''(x) = e^{5ix} g(2x)$ si ottiene

$$(i\lambda)^2 \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[g(2x)](\lambda - 5) = \frac{1}{2}\big[\hat{g}(\lambda/2)\big]_{\lambda \to \lambda - 5} = \frac{1}{2}\hat{g}((\lambda-5)/2)\,,$$

vale a dire

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^2}\, \hat{g}((\lambda-5)/2)\,.$$

Quindi

$$\hat{f}(3) = -\frac{1}{18}\hat{g}(-1) = -\frac{1}{18}\sin(-\pi/4)\, e^{-1} = \frac{1}{18\sqrt{2}e}\,.$$

(10) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sul residuo all'infinito.