Metodi Matematici della Fisica. S2B

Filippo Cesi – 2015–16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt) [1]. Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-i)^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$$

Risp: (a) 1. (b) 1/4.

(2) (6 pt). Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^z = i - 1$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 16 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Soluzione. Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^z = \exp(z\log(i)) = \exp\big[z(\log|i| + i\,\mathrm{Arg}\, i)\big] = e^{iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^z = 1 - i$ diventa dunque

$$e^{iz\pi/2} = i - 1\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$iz\frac{\pi}{2} = \log|i-1| + i(\arg(i-1) + 2k\pi) = \frac{1}{2}\log 2 + i(3\pi/4 + 2k\pi) \qquad k\in\mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k + \frac{3}{2} - i\,\frac{\log 2}{\pi} \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 16 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\,\mathrm{Re}\, z| \le 8 \qquad |\,\mathrm{Im}\, z| \le 8\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 4:

$$z_{-2},\ z_{-1},\ z_0\ z_1\,.$$

(3) (5 pt). Determinare tutte le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine. Disegnare *accuratamente* sul piano complesso tutti i punti di singolarità che si trovano all'interno del disco di raggio 7 centrato in 0.

$$\frac{z^2 - 3z - 10}{\sin(\pi z/2) - 1}$$

Soluzione. Trattandosi del quoziente fra due funzioni analitiche, le singolarità si trovano in corrispondenza degli zeri del denominatore. Questi sono dati da

$$D(z) := \sin(\pi z/2) - 1 = 0 \qquad\qquad \sin(\pi z/2) = 1\,,$$

vale a dire

$$\frac{\pi z}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Gli zeri del denominatore sono quindi

$$\begin{aligned} z_k &= 1 + 4k \quad k\in\mathbb{Z} \\ &= \ldots, -7,\ -3,\ 1,\ 5,\ 9,\ \ldots \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

Poichè

$$D'(z_k) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi z_k/2) = 0$$
$$D''(z_k) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\pi z_k/2) = -\frac{\pi^2}{4} \neq 0\,,$$

gli zeri del denominatore hanno molteplicità 2.

D'altra parte il numeratore può essere scritto come

$$N(z) := z^2 - 3z - 10 = (z+2)(z-5)\,.$$

Possiamo quindi concludere che le singolarità della funzione sono

$$\begin{array}{ll} z_k = 1 + 4k \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1 & \text{polo di ordine 2} \\ z_1 = 5 & \text{polo di ordine 1}\,. \end{array}$$

(4) (5 pt). Calcolare

$$\int_{|z-6i|=4} \frac{dz}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)}$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{array}{ll} z_k = i(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k \notin \{0,-1\} & \text{polo di ordine 1} \\ z_0 = \pm i\pi & \text{polo di ordine 2} \end{array}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_1 = i\pi$ e $z_2 = 3i\pi$. Si calcola facilmente

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = -\frac{1+i\pi}{4\pi^2} \qquad \mathrm{Res}(f, 3i\pi) = \frac{1}{8\pi^2}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-6i|=4} \frac{dz}{(z^2+\pi^2)(e^z+1)} = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,i\pi) + \mathrm{Res}(f,3i\pi)\right] = \frac{1}{2} - \frac{i}{4\pi}\,.$$

(5) (5 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x\, dx}{x^2 - 2x + 5}$$

Risp: $\frac{\pi}{2e^2}\sin(1)$.

(6) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$xe^{-x^2+5ix}$$

Soluzione. Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl} & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-s^2/4} \\ [f(x) \to xf(x)] & x\,e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\sqrt{\pi}e^{-s^2/4}\right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}se^{-s^2/4} \\ [f(x) \to e^{5ix}f(x)] & x\,e^{-x^2+5ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{2}(s-5)e^{-(s-5)^2/4} \end{array}$$

(7) (5 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,e^{-x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\,e^{-x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$; (c) $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

Soluzione. (a) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + 0\right) = \frac{e^{-\pi}}{2}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned} \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2x}\,dx = \left.\frac{e^{-2x}}{2\pi}\right|_{\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right)\,. \end{aligned}$$

(8) (5 pt). Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$D^3(|1-x^2|)$$

Soluzione. Si ha

$$|1-x^2| = (1-x^2)\ \mathrm{sgn}(1-x^2)\,.$$

Poichè $D\,\mathrm{sgn}(1-x^2) = 2(\delta_{-1} - \delta_1)$, ottengo

$$\begin{aligned} D^3\left(|1-x^2|\right) &= D^2\left[-2x\ \mathrm{sgn}(1-x^2) + (1-x^2)\,2(\delta_{-1}-\delta_1)\right] \\ &= 2\,D^2\left[-x\ \mathrm{sgn}(1-x^2) + (1-x^2)\,(\delta_{-1}-\delta_1)\right] \\ &= -2\,D^2\left[x\ \mathrm{sgn}(1-x^2)\right] \\ &= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(1-x^2) + 2x\,(\delta_{-1}-\delta_1)\right] \\ &= -2\,D\left[\mathrm{sgn}(1-x^2) - 2(\delta_{-1}+\delta_1)\right] \\ &= -4\ \left[(\delta_{-1}-\delta_1) - (\delta'_{-1}+\delta'_1)\right] \end{aligned}$$

(9) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := \sin(ax)$ si annulla nei punti

$$\sin(ax) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = \frac{k\pi}{a} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè

$$|b'(x_k)| = |a\ \cos(2x_k)| = |a\cos(k\pi)| = |a\,(-1)^k| = a\,,$$

si ottiene

$$\delta(\sin(ax)) = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\kappa\pi/a}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(\sin(ax))\,dx = \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\delta(x-\kappa\pi/a)\,dx \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\pi/a|} = \frac{1}{a}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\pi/a}\Big) \\
&= \frac{1+e^{-\pi/a}}{a(1-e^{-\pi/a})}\,.
\end{aligned}$$

(10) (5 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla cosiddeta "Stima di Cauchy" sulle derivate di una funzione analitica.