Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3

Filippo Cesi – 2015–16

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1+3i)^n z^n \,.$$

Risp: (a) 1/4. (b) $1/\sqrt{10}$.

(2) (6 pt). Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera, non identicamente nulla, tale che $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Alternativamente, se una tale funzione non esiste, dimostrare che non esiste.

(3) (8 pt). Calcolare

$$(a)\quad \int_{|z-1|=2} \frac{1+e^z}{z\,\sin(\pi z/2)}\, dz \qquad\qquad (b)\quad \int_{|z|=1} \frac{z\,\exp(1/z)}{1+2z}\, dz \,.$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{1+e^z}{z\,\sin(\pi z/2)} \,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{aligned} &z = 0 &&\text{polo di ordine 2} \\ &z = 2 &&\text{polo di ordine 1}\,. \end{aligned}$$

La parte singolare dello sviluppo di f nell'intorno delle singolarità è data da

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{4}{\pi z^2} + \frac{2}{\pi z} + \mathcal{O}(1) && z_0 = 0 \\ f(z) &= -\frac{1+e^2}{\pi(z-2)} + \mathcal{O}(1) && z_0 = 2\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,2)\right] = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1+e^2}{\pi}\right) = 2i\left(1-e^2\right) \,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{z\,\exp(1/z)}{1+2z} \,.$$

Poichè non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione posso usare il metodo del residuo all'infinito.

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2} \frac{z^{-1} e^z}{1+2/z} = \frac{e^z}{z^2(z+2)} = \frac{1+z+\mathcal{O}(z^2)}{2z^2(1+z/2)} \\ &= \frac{1+z+\mathcal{O}(z^2)}{2z^2}\left(1 - \frac{z}{2} + \mathcal{O}(z^2)\right) \\ &= \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z} + \mathcal{O}(1)\,. \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

Quindi

$$\operatorname{Res}\Big[\frac{1}{z^2}f\Big(\frac{1}{z}\Big),0\Big] = \frac{1}{4}\,.$$

e dunque

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{i\pi}{2}\,.$$

(4) (6 pt). Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{x^2+6x+18}\,dx$$

Risp: $\sqrt[3]{2}\,3^{-5/6}\,\pi$.

(5) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = xe^{-4x^2+7ix} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{1}{(3x+4i)^2}\,.$$

Risp: (a) $-\frac{i\sqrt{\pi}}{16}(\lambda-7)\exp\big[-(\lambda-7)^2/16\big]$. (b) $-\frac{2\pi}{9}H(\lambda)\lambda\exp[-4\lambda/3]$.

(6) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\quad D^3\Big((1+e^x)^2\,\delta_0''\Big) \qquad\qquad (b)\quad D^2\big(|\cos x|\big)\,.$$

Risp: (a) $6\delta_0^{(3)} - 8\delta_0^{(4)} + 4\delta_0^{(5)}$. (b) $-|\cos x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{(k+1/2)\pi}$.

(7) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x\pi/2)\,\delta(2x^2-5x+2)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := 2x^2-5x+2$ si annulla nei punti

$$x_1 = 1/2 \qquad x_2 = 2\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 4x-5 \qquad\qquad |b'(1/2)| = 3 \qquad\qquad |b'(2)| = 3$$

da cui si ottiene

$$\delta(2x^2-5x+2) = (\delta_{1/2}+\delta_2)/3\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x\pi/2)\,\delta(x^2-5x+4)\,dx &= \frac{1}{3}\big[\delta_{1/2}(\cos(x\pi/2)) + \delta_2(\cos(x\pi/2))\big]\\ &= \frac{1}{3}\big(\cos(\pi/4)+\cos(\pi)\big) = \frac{\sqrt{2}-2}{6}\,.\end{aligned}$$

(8) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema Fondamentale dell'Algebra