# Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2016–17

| | |
|---|---|
| Nome | |
| Cognome | |

| problema | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| test | |
| totale | |
| voto in trentesimi | |

**Regolamento:**

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (8 pt[1]). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{x^6+1}\,dx\,.$$

*Soluzione.* Sia $f(x) = \frac{x^3}{x^6+1}$. Poiché $f(x) = g(x^3)$ si ha

$$I := \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{J}{1-e^{i2\pi/3}}\,,$$

in cui

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\,.$$

e $\gamma_R$ il cammino chiuso a forma di fetta di torta di raggio $R$ e angolo $\alpha = 2\pi/3$. Più precisamente

$$\gamma_R = [0,R] + C_R + [Re^{i\alpha}, 0] \qquad \text{in cui } C_R(t) := Re^{it}\ t \in [0,\alpha].$$

L'integrale $J$ si calcola col metodo dei residui. Le singolarità di $f(z)$ sono date da

$$z_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)\right] \qquad\qquad k = 0,1,\ldots,5\,.$$

Sfruttando il fatto che $z_k^6 = -1$ trovo

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{z_k^3}{6z_k^5} = -\frac{1}{6}\,z_k^4\,.$$

Le singolarità che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono $z_0$ e $z_1$. Quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi/3}}\,(\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_1)) \\ &= \frac{2\pi i}{e^{-i\pi/3}-e^{i\pi/3}}\,e^{-i\pi/3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(e^{i2\pi/3}+e^{i2\pi}\right) \\ &= \frac{\pi}{6\sin(\pi/3)}\left(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,2\cos(\pi/3) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

(2) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di $x$, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad $x$).

$$(a)\quad D^2(\cos x\, e^{-|x|}) + 2\delta_0 \qquad\qquad (b)\quad D^3\big[\sin x\, D^4(|x|)\big]\,.$$

*Soluzione.* (a) Si ha

$$D\big(\cos x\, e^{-|x|}\big) = e^{-|x|}\,(-\sin x - \cos x\,\mathrm{sgn}\,x)\,.$$

Derivando ancora si ottiene

$$\begin{aligned} D^2\big(\cos x\, e^{-|x|}\big) &= e^{-|x|}\,(-\cos x + \sin x\,\mathrm{sgn}\,x - 2\cos x\,\delta_0 + \sin x\,\mathrm{sgn}\,x + \cos x) \\ &= 2e^{-|x|}\sin|x| - 2e^{-|x|}\cos x\,\delta_0 \\ &= 2e^{-|x|}\sin|x| - 2\delta_0\,. \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 trentesimi

Quindi

$$D^2(\cos x\, e^{-|x|}) + 2\delta_0 = 2e^{-|x|}\sin|x|\,.$$

(b) Si ha

$$\sin x\, D^4(|x|) = 2\sin x\,\delta_0'' = 2\left[\sin(0)\,\delta_0'' - 2\cos(0)\,\delta_0' - \sin(0)\,\delta_0\right] = -4\delta_0'\,.$$

Quindi

$$D^3\left[\sin x\, D^4(|x|)\right] = -4\delta_0^{(4)}\,.$$

(3) (7 pt). Sia $F(x) = e^{-x^2}\lfloor x\rfloor$. Calcolare, nel senso delle distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato, la quantità $D^3(F' + 2xF)$.

*Soluzione.* Si ha

$$F'(x) = D(\,e^{-x^2}\lfloor x\rfloor\,) = -2xe^{-x^2}\lfloor x\rfloor + e^{-x^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = -2xF(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}\delta_k\,,$$

quindi

$$D^3(F' + 2xF) = D^3\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}\delta_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2}\delta_k^{(3)}\,.$$

(4) (7 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 2-|x| & \text{se } |x|\le 2\\ 0 & \text{se } 2<|x|\le\pi\end{cases}$$

Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k)}{k^2}$ (ricorda che $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$).

*Risp:* $f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2k)}{k^2}\cos(kx)$. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k)}{k^2} = \pi^2/6 - \pi + 1$.

(5) (10 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = \frac{x^2}{(1+a^2x^2)^2}\qquad (a>0)\qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{1}{(2x+i)^2}$$

*Soluzione.* (a). Partendo da una coppia nota $f$, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|}\\
[x\to ax] & \dfrac{1}{1+a^2x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{a}e^{-|\lambda/a|} = \dfrac{\pi}{a}e^{-|\lambda|/a}\\
[f(x)\to f'(x)] & -\dfrac{2a^2x}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi}{a}\lambda e^{-|\lambda|/a}\\
[f(x)\to -\dfrac{x}{2a^2}f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{2a^2}iD\Big(\dfrac{i\pi}{a}\lambda e^{-|\lambda|/a}\Big)\\
 & \dfrac{x^2}{(1+a^2x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{2a^3}e^{-|\lambda|/a}\Big(1-\dfrac{|\lambda|}{a}\Big)\,.
\end{array}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda\,\mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

(b). Partendo da una coppia nota $f$, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$
\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[\mathcal{F} = (2\pi)(\mathcal{F}^{-1}\circ P)] & \dfrac{1}{1+ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(-\lambda)\,e^{\lambda} \\
[x \to (-x)] & \dfrac{1}{1-ix} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
[f \to (-i)f] & \dfrac{1}{x+i} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,2i\pi H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
[f \to -f'] & \dfrac{1}{(x+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,2\pi\lambda H(\lambda)\,e^{-\lambda} \\
[x \to 2x] & \dfrac{1}{(2x+i)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\,\dfrac{\pi}{2}H(\lambda)\,\lambda\,e^{-\lambda/2}
\end{array}
$$

(6) (7 pt). Sia $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e sia

$$I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+iax}\,\delta\big((x^{2n}-1)\,e^{-x^2}\big)\,dx\,.$$

Calcolare il massimo della funzione $f(a) := |I(a)|$ per $a \in \mathbb{R}$.

*Soluzione.* La funzione $b(x) := (x^{2n}-1)\,e^{-x^2}$ si annulla nei punti $x = \pm 1$. Inoltre si ha

$$b'(x) = e^{-x^2}\big(2nx^{2n-1} - 2x(x^{2n}-1)\big) \qquad\qquad |b'(\pm 1)| = \frac{2n}{e}\,,$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{e}{2n}\left(\delta_1 + \delta_{-1}\right)\,.$$

Quindi

$$I(a) = \frac{e}{2n}\left(\Big[e^{-x^2+iax}\Big]_{x=1} + \Big[e^{-x^2+iax}\Big]_{x=-1}\right) = \frac{e}{2n}\left(e^{-1+ia} + e^{-1-ia}\right) = \frac{\cos a}{n}\,.$$

Otteniamo così che la funzione $f(a) = |I(a)| = |\cos(a)/n|$ ha come valore massimo $1/n$.

(7) (7 pt). Sia $H_n$ l'$n$-simo polinomio di Hermite $H_n(x) := (-1)^n\,e^{x^2}\,D^n\big(e^{-x^2}\big)$. Calcolare la *funzione generatrice* dei polinomi di Hermite definita come

$$F(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}\,.$$

(Sugg: Osservare che, se $\gamma$ è un cammino chiuso nel piano complesso che gira una volta in senso antiorario attorno al punto $x$, grazie alla formula integrale di Cauchy posso scrivere

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\,\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\,dz\,.$$

a questo punto si può scambiare la serie con l'integrale e ...).