Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2

Filippo Cesi – 2016–17

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (6 pt).[1] Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^{2n} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (2+3i)^n z^n\,.$$

Risp: (a) 1/2. (b) $1/\sqrt{13}$.

(2) (6 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=4} \frac{e^{2z}\,(z+\pi)}{z\,\sin z}\, dz\,.$$

Schema di soluzione. (a) Sia

$$f(z) := \frac{e^{2z}\,(z+\pi)}{z\,\sin z}\,.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$z = 0$	polo di ordine 2
$z = -\pi$	eliminabile
$z = +\pi$	polo di ordine 1 .

Quindi

$$\int_{|z|=4} f(z)\, dz = 2\pi i\, \big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)\big] = 2\pi i\, \big[1 + 2\pi - 2e^{2\pi}\big]\,.$$

(3) (6 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2(z^2+1)}{(1+z^3)\,(3z^2+2)}\, dz$$

Risp: $2i\pi/3$.

(4) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2+4)^2}\, dx\,.$$

Soluzione. Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2+4)^2}\, dx \\ &= \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}\, dx}{(x^2+4)^2} \\ &= \mathrm{Im} \int \frac{z e^{iz}\, dz}{(z^2+4)^2} \\ &= \mathrm{Im}\, \big[2\pi i\ \mathrm{Res}\big(g(z), 2i\big)\big]\ , \end{aligned}$$

[1] 1 pt = 0.5 voto

in cui

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}\,.$$

La parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent di g nel punto $z = 2i$ è data da

$$g(z) = -\frac{i}{8e^2(z-2i)^2} + \frac{1}{8e^2(z-2i)} + \underline{\mathcal{O}}(1)\,.$$

Otteniamo dunque

$$I = \mathrm{Im}\left(2\pi i\,\frac{1}{8e^2}\right) = \frac{\pi}{4e^2}\,.$$

(5) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni, riconducendosi, se possibile, a casi noti

$$(a)\quad f(x) = xe^{-x}H(x-2) \qquad\qquad (b)\quad f(x) = xe^{-4x^2+5ix}\,.$$

Soluzione. (a) Partendo ad una coppia nota f, $\hat f$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[x \to x-2] & H(x-2)\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-2i\lambda}}{1+i\lambda} \\
[f(x) \to xf(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x+2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-2i\lambda}\,\dfrac{2\lambda-3i}{(1+i\lambda)^2} \\
[f(x) \to e^{-2}\,f(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\lambda-2}\,\dfrac{3+2i\lambda}{(1+i\lambda)^2}
\end{array}$$

(b) Partendo da una coppia nota f, $\hat f$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-s^2/4} \\
[x \to 2x] & e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}e^{-s^2/16} \\
[f(x) \to xf(x)] & x\,e^{-4x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & iD\left[\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}e^{-s^2/16}\right] = -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{8}se^{-s^2/16} \\
[f(x) \to e^{i5x}f(x)] & x\,e^{-4x^2+i5x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{i\sqrt{\pi}}{16}(s-5)e^{-(s-5)^2/16}
\end{array}$$

(6) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato (n è un intero).

$$(a)\quad D^2(|\cos x|) \qquad\qquad (b)\quad D^3\left((n+x)^2\,\delta_0^{(3)}\right)\,.$$

Risp: (a) $-|\cos x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{\pi/2+k\pi}$. (b) $n^2\delta_0^{(6)} - 6n\delta_0^{(5)} + 6\delta_0^{(4)}$.

(7) (6 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, \delta\big((x^2-1)(e^x-1)\big)\; dx\,.$$

Soluzione. Sia $b(x) := (x^2-1)\,(e^x-1)$. La funzione b si annulla in $x=0$ e $x=\pm 1$. Inoltre

$$b'(x) = 2x\,(e^x-1) + (x^2-1)e^x = e^x\,\big(x^2+2x-1\big) - 2x\,.$$

Dunque

$$|b'(0)| = 1 \qquad\qquad |b'(1)| = 2(e-1) \qquad\qquad |b'(-1)| = 2(1-1/e) = \frac{e-1}{e}\,.$$

Per definizione di funzione composta della delta di Dirac, otteniamo

$$\delta(b(x)) = \frac{\delta_0}{|b'(0)|} + \frac{\delta_1}{|b'(1)|} + \frac{\delta_{-1}}{|b'(-1)|} = \delta_0 + \frac{\delta_1}{2(e-1)} + \frac{e}{2(e-1)}\delta_{-1}\,.$$

In questo modo si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\,\delta((x-1)(e^x-1))\,dx = \cos(0) + \frac{1}{2(e-1)}\cos(\pi) + \frac{e}{2(e-1)}\cos(-\pi)$$
$$= 1 - \frac{e+1}{2(e-1)} = \frac{e-3}{2(e-1)}\,.$$

(8) (6 pt). Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione $P(1/x)$.

Soluzione. Fatto in classe.

(9) (6 pt). Enunciare e dimostrare il teorema sulla cosiddetta "Stima di Cauchy" sulle derivate di una funzione analitca.