Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E1

Filippo Cesi – 2019–20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 punto = 0.5 trentesimi

(1) (6 pt). Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(3+i)^n\,z^n\,.$$

Soluzione.

$$|a_n|^{1/n} = n^{1/n}\,|3+i| = n^{1/n}\,\sqrt{10} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{10}\,.$$

Quindi $R = 1/\sqrt{10}$.

(2) (8 pt). Calcolare, usando, se necessario, il ramo principale

$$(a)\quad \log\left(\left(2\sqrt{3}+2i\right)^7\right) \qquad\qquad (b)\quad \operatorname{Re}\left(e^{2+3i}\right)$$

Soluzione. (a) Sia

$$w = \left(2\sqrt{3}+2i\right)^7 = \left(4\,e^{i\pi/6}\right)^7 = 2^{14}\,e^{i7\pi/6}$$

Allora

$$\log w = \log|w| + i\,\operatorname{Arg}(w) = \log\left(2^{14}\right) - i\frac{5\pi}{6} = 14\,\log(2) - i\frac{5\pi}{6}$$

(b) $\operatorname{Re}\left(e^{2+3i}\right) = \operatorname{Re}\left(e^2\,(\cos 3 + i\sin 3)\right) = e^2\,\cos 3$.

(3) (8 pt). Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di

$$f(z) = \frac{z+\sin z}{(e^z-1)^3}\,.$$

Soluzione. Si ha, per $z \to 0$

$$f(z) = \frac{\mathcal{O}(z)}{\mathcal{O}(z^3)} = \mathcal{O}(z^{-2})$$

quindi svilupperò ogni fattore moltiplicativo, tenendo i primi 2 termini a partire da primo non nullo

$$z + \sin z = 2z + \mathcal{O}(z^3)$$
$$e^z - 1 = z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3) \qquad\qquad (e^z-1)^3 = z^3 + 3z^4/2 + \underline{\mathcal{O}}(z^5)\,.$$

In questo modo ottengo

$$f(z) = \frac{2z+\mathcal{O}(z^3)}{z^3+3z^4/2+\underline{\mathcal{O}}(z^5)} = \frac{2z+\mathcal{O}(z^3)}{z^3\,(1+\underbrace{3z/2+\underline{\mathcal{O}}(z^2)}_{u=\mathcal{O}(z)})}$$
$$= \frac{2z+\mathcal{O}(z^3)}{z^3}\,(1-u+\mathcal{O}(u^2)) = \left(\frac{2}{z^2}+\mathcal{O}(1)\right)\,(1-3z/2+\underline{\mathcal{O}}(z^2))$$
$$= \frac{2}{z^2} - \frac{3}{z} + \underline{\mathcal{O}}\,(1)$$

(4) (6 pt). Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{1/z}\,(z^2 - 4z + 3)}{z\,(\sin(\pi z))^3}\,.$$

Soluzione. Si ha

$$\sin(\pi z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{Z} \quad \text{zeri semplici}$$

quindi gli zeri del denominatore sono

$$z = 0 \quad \text{zero molt. } 4 \qquad\qquad z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \text{zeri molt. } 3$$

Il numeratore ha una singolarità essenziale in 0 e zeri semplici in 1 e 3. Quindi le singolarità di f sono

$$z = 0 \quad \text{sing. essenziale} \qquad z \in \{1,3\} \quad \text{polo 2} \qquad z \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,3\} \quad \text{polo 3}$$

(5) (6 pt). Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 + 4}{z^2\,(z^7 + 1)}\,dz$$

Soluzione. Poiché non ci sono singolarità all'esterno del cammino di integrazione e siccome $zf(z) \to 0$ per $z \to \infty$, grazie al teorema sul residuo all'infinito, ottengo che l'integrale è nullo.

(6) (8 pt). Calcolare

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z^2 - 7z + 10}{(\sin(\pi z/2))^2}\,dz\,.$$

Soluzione. Sia

$$f(z) := \frac{z^2 - 7z + 10}{(\sin(\pi z/2))^2}\,.$$

Il denominatore si annulla per

$$\sin(\pi z/2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 2k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Le singolarità di f che si trovano all'interno del cammino di integrazione sono

$$\begin{aligned} z &= 0 \qquad && \text{polo di ordine 2} \\ z &= 2 \qquad && \text{polo di ordine 1}\,. \end{aligned}$$

La parte singolare dello sviluppo di f nell'intorno delle singolarità è data da

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{40}{\pi^2 z^2} - \frac{28}{\pi^2 z} + \underline{\mathcal{O}}(z) \qquad && z_0 = 0 \\ f(z) &= -\frac{12}{\pi^2(z-2)} + \underline{\mathcal{O}}\left((z-2)^0\right) \qquad && z_0 = 2\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{|z-1|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\,\big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2)\big] = 2\pi i\left(-\frac{28}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2}\right) = -\frac{80i}{\pi}\,.$$

(7) (8 pt). Esprimere il valore I dell'integrale in termini di opportuni residui.

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(4+x^2)^2}\, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{5+x^2+x^4}{(1+x^2)^4}\, dx$$

Soluzione. Sia f l'integrando. Allora

$$(a) = 2\pi i \int f = -2\pi i \ \mathrm{Res}(f, -2i)$$

$$(b) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \pi i \int f = \pi i \ \mathrm{Res}(f, i)\,.$$

(8) (4 pt). Dovendo calcolare la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f in $z = 0$, fino a quale ordine devo sviluppare e^z?

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z^3}{\sin^3 z\,(1-e^z)^2}$$

Soluzione. Poichè

$$f(z) = \frac{\mathcal{O}(z^2)}{\mathcal{O}(z^3)\,\mathcal{O}(z^2)} = \mathcal{O}(z^{-3})$$

e poichè $1 - e^z = \mathcal{O}(z)$ sviluppo questo fattore moltiplicativo fino a z^3 incluso

$$1 - e^z = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^4)\,.$$

(9) (8 pt). Calcolare, per n intero positivo

$$(a) \quad \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^n}, 0\right) \qquad\qquad (b) \quad \mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(\sin z)^{n+1}}, 0\right)$$

Soluzione. (a)

$$\frac{e^z}{z^n} = \frac{1}{z^n}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right)$$

quindi $\mathrm{Res}(f, 0) = 1/(n-1)!$.

(b)

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(\sin z)^{n+1}}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^{n+1}}{(\sin z)^{n+1}}\right) = 1$$

(10) (6 pt). Sia G una regione in $\mathbb{C}$ e sia $f : G \mapsto \mathbb{C}$ analitica. Dimostrare che se $|f|$ è costante allora f è costante. (Sugg: porre $f = u + iv$ ed usare ...).

Soluzione. Sia $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ e supponiamo che sia $|f(z)| = c$. Se $c = 0$ si ha $|f(z)| = 0$, quindi $f(z) = 0$ e l'affermazione è dimostrata. Se $c > 0$, pongo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e dunque

$$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) = c^2\,.$$

Derivando rispetto a x e a y ottengo

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad\qquad 2uu_y + 2vv_y = 0\,,$$

che, utilizzando le condizioni di Cauchy–Riemann, implica

$$uu_x - vu_y = 0 \qquad\qquad uu_y + vu_x = 0\,.$$

Considerando u_x e u_y come incognite, risolvo il sistema di due equazioni e ottengo che l'unica soluzione è la soluzione nulla $u_x = u_y = 0$. Dalle condizioni di Cauchy–Riemann segue allora che $v_x = v_y = 0$. Quindi le funzioni u e v sono entrambe costanti. Di conseguenza $f = u + iv$ è anch'essa costante. $\square$