Modelli e Metodi Matematici della Fisica. E2

Filippo Cesi – 2019–20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
ordine e calligrafia	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi.

(1) (7 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato: $D^3\big(x\,e^{-|x|}\big)$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
D^3\big(x\,e^{-|x|}\big) &= D^2\left(e^{-|x|}(-\operatorname{sgn}(x)x+1)\right) = D^2\left(e^{-|x|}(1-|x|)\right)\\
&= D\left(e^{-|x|}\big[(|x|-1)\operatorname{sgn}x - \operatorname{sgn}x)\big]\right) = D\left(e^{-|x|}(x-2\operatorname{sgn}x)\right)\\
&= e^{-|x|}(-|x|+2+1-4\delta_0) = e^{-|x|}(3-|x|) - 4e^{-|x|}\delta_0\\
&= e^{-|x|}(3-|x|) - 4\delta_0\,.
\end{aligned}$$

(2) (8 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\,(4-x)$

$$H(x)\,(4-x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)] \qquad x\in[-\pi,\pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$; (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\big[|a_k|^2+|b_k|^2\big]$.

Soluzione.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0^\pi}(4-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(4\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 4-\frac{\pi}{2}\,.$$

Sfruttando la convergenza puntuale in $x=0$ si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}\big(f(0^-)+f(0^+)\big) = 2$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2 - \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Sfruttando la convergenza puntuale in $x=\pi$ si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(-1)^k = \frac{1}{2}\,(f(\pi)+f(-\pi)) = 2-\frac{\pi}{2}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(-1)^k = 2-\frac{\pi}{2}-\frac{a_0}{2} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Uso l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|^2+|b_k|^2\big)\,. \tag{0.1}$$

Poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \int_0^{\pi}(4-x)^2\,dx = \int_0^{\pi}(16-8x+x^2)\,dx = 16\pi - 4\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}\,,$$

ottengo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|^2+|b_k|^2\big) &= 16-4\pi+\frac{\pi^2}{3} - \frac{|a_0|^2}{2} = 16-4\pi+\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\left(4-\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&= 16-4\pi+\frac{\pi^2}{3} - \left(8-2\pi+\frac{\pi^2}{8}\right) = 8-2\pi+\frac{5\pi^2}{24}\,.
\end{aligned}$$

(3) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione $f(x) = H(x-3)\,x\,e^{-x}$. Partendo ad una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & H(x)\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{1+i\lambda} \\
[x \to x-3] & H(x-3)\,e^{-x+3} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{e^{-3i\lambda}}{1+i\lambda} \\
[f(x) \to x f(x)] & H(x-3)\,x\,e^{-x+3} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & ie^{-3i\lambda}\,\dfrac{4+3i\lambda}{(1+i\lambda)^2} \\
[f(x) \to e^{-3} f(x)] & H(x-2)\,x\,e^{-x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-3(i\lambda+1)}\,\dfrac{4+3i\lambda}{(1+i\lambda)^2}
\end{array}$$

(4) (8 pt). Calcolare la seguente espressione in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\,\delta(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$ si annulla nei punti $0, 1, 2$. Inoltre si ha

$$b'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \qquad |b'(0)| = 2 \qquad |b'(1)| = 1 \qquad |b'(2)| = 2$$

da cui si ottiene

$$\delta(b(x)) = \frac{1}{2}\delta_0 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2\,.$$

Quindi, ponendo $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, ottengo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx &= \frac{1}{\delta_0}(g) + \delta_1(g) + \frac{1}{\delta_2}(g) \\
&= \frac{\cos(0)}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3+2\sqrt{3}}{4}\,.
\end{aligned}$$

(5) (8 pt). Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ (1-\cos x)\,e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione. f è continua a tratti, quindi mi preoccupo solo dell'andamento all'infinito di $x^k f(x)$. Poiché $f(x)$ tende a zero in maniera esponenzialmente veloce per $x \to \infty$, $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.

Cerco il più piccolo intero q tale che $f^{(q)}$ è discontinua. L'unico punto di discontinuità possibile per le derivate di f è $x = 0$. Il limite sinistro di $f^{(k)}(x)$ per $x \to 0^-$ è banalmente nullo. Calcolo il limite destro. Sia $g(x) = (1-\cos x)\,e^{-x}$. Allora

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1-\cos x)\,e^{-x} & g(0) &= 0 \\
g'(x) &= (\sin x - 1 + \cos x)\,e^{-x} & g'(0) &= 0 \\
g''(x) &= (-\sin x + 1 - \cos x + \cos x - \sin x)\,e^{-x} = (1 - 2\sin x)\,e^{-x} & g''(0) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Quindi $q = 2$.

(6) (7 pt). Sia $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione analitica in un anello aperto che contiene la circonferenza unitaria e sia $f(\vartheta) := h(e^{i\vartheta})$. Dimostrare che lo sviluppo in serie di Fourier per f può essere derivato direttamente dalla serie di Laurent per h.