Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/C

Filippo Cesi – 2019–20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (10 pt). Calcolare il raggio di convergenza: (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(5+3i)^n\, z^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n$.

Risp: (a) $1/\sqrt{34}$. (b) $1/4$.

(2) (10 pt). Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{|z-3|=4} \frac{\cos z}{z\,(e^{iz}-1)}\, dz$.

Schema di soluzione. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z\,(e^{iz}-1)}\,.$$

La funzione f ha le seguenti singolarità isolate

$$\begin{array}{ll} z_0 = 0 & \text{polo di ordine 2} \\ z_k = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0 & \text{polo di ordine 1} \end{array}$$

Le singolarità interne al cammino di integrazione sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi$. Si calcola facilmente

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{Res}(f,2\pi) = -\frac{i}{2\pi}\,.$$

Quindi

$$\int_{|z-3|=4} \frac{dz}{z\,(e^{iz}-1)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2\pi)\right] = 1 - i\pi\,.$$

(3) (9 pt). Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2+6x+10}\, dx$

Soluzione.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2+6x+10}\, dx = \operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10}\, dx\right) = \operatorname{Im}\Big(\int \frac{e^{iz}}{z^2+6z+10}\, dz\Big)$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+6z+10}, -3+i\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\pi e^{-1-3i}\right) = -\frac{\pi\sin(3)}{e}\,.$$

(4) (9 pt). Sia $f(z)$ una funzione intera che non si annulla mai, ad eccezione del punto $z=1$ che rappresenta uno zero semplice di f e sia

$$g(z) = \frac{e^{-2z}}{f(z^4)}.$$

Supponendo di sviluppare g in serie di Taylor con centro nel punto $2 + i$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - (2 + i)\right)^n$$

determinare il raggio di convergenza R di questa serie di potenze.

Soluzione. La funzione g è analitica ovunque ad eccezione dei punti in cui $z^4 = 1$, vale a dire

$$z \in X := \{1, -1, i, -i\} .$$

Il raggio di convergenza della serie centrata in $z_0 = 2 + i$ è uguale alla distanza di z_0 da X. Il punto di X più vicino a z_0 è 1, quindi

$$R = \operatorname{dist}(z_0, 1) = |z_0 - 1| = |1 + i| = \sqrt{2}$$