Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S1/F

Filippo Cesi – 2019-20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad D^3\big(xe^{-2x}D^4|x|\big) \qquad\qquad (b)\quad D^3\big[e^{|x|}D^2\big((1+x)\,e^{-|x|}\big)\big]\,.$$

Risp: (a) $-4\left(2\delta_0^{(3)}+\delta_0^{(4)}\right)$. (b) $-2\left(2\delta_0''+\delta_0^{(3)}\right)$.

(2) (8 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di (a) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+9x^2)^2}$, (b) $f(x)=xe^{-x^2+2x}$.

Soluzione. (a) Partendo da una coppia nota f, $\hat{f}$ ed usando le regole di calcolo delle trasformate di Fourier, ottengo

$$\begin{array}{llcl}
 & \dfrac{1}{1+x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \pi e^{-|\lambda|} \\
[x\to 3x] & \dfrac{1}{1+9x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{3}e^{-|\lambda/3|}=\dfrac{\pi}{3}e^{-|\lambda|/3} \\
[f(x)\to f'(x)] & -\dfrac{18x}{(1+9x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{i\pi\lambda}{3}e^{-|\lambda|/3} \\
[f(x)\to -\dfrac{x}{18}f(x)] & \dfrac{x^2}{(1+9x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\dfrac{1}{18}iD\Big(\dfrac{i\pi\lambda}{3}e^{-|\lambda|/3}\Big) \\
 & \dfrac{x^2}{(1+9x^2)^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{\pi}{54}e^{-|\lambda|/3}\Big(1-\dfrac{|\lambda|}{3}\Big)\,.
\end{array}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato l'identità: $\lambda\,\mathrm{sgn}(\lambda)=|\lambda|$.

(b)

$$\begin{array}{llcl}
 & e^{-x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4} \\
[x\to x-1] & e^{-x^2+2x-1} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4-i\lambda} \\
[f\to e\,f] & e^{-x^2+2x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4-i\lambda+1} \\
[f\to x\,f] & e^{-x^2+2x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4-i\lambda+1}\left(1-\dfrac{i\lambda}{2}\right)
\end{array}$$

(3) (8 pt). Sia $a\in\mathbb{R}$ e sia $I(a):=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+iax}\,\delta\big((x^4-1)\,e^{-x^2}\big)\,dx$. Calcolare il massimo della funzione $f(a):=|I(a)|$ per $a\in\mathbb{R}$.

Soluzione. Vedi 16-17/E2.

(4) (8 pt). Sapendo che vale lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$

$$|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}\,.$$

Calcolare: (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$

Soluzione. Sfruttando la convergenza puntuale di questa serie in $x=0$, si ottiene

$$0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Sfruttando la convergenza puntuale di questa serie in $x = \pi/2$, si ottiene

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{2-\pi}{4}\,.$$

(5) (6 pt). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ reale dispari. Cosa posso affermare su $\hat{f}$? (Dimostrare).