Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S2/C

Filippo Cesi – 2019–20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
totale	
test	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risultato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (8 pt). Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}^{\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{4+i}\right)^n z^n .$$

Risp: (a) 1. (b) $\sqrt{17/2}$.

(2) (7 pt). Calcolare $\displaystyle\int_{|z-i|=3} \frac{z(z-i)}{e^{\pi z}+1}\, dz$.

Schema di soluzione. All'interno del cammino di integrazione ci sono 3 singolarità

$$z = i \quad \text{eliminabile} \qquad z = -i \quad \text{polo semolice} \qquad z = 3i \quad \text{polo semolice.}$$

Si ottiene

$$\int_{|z-i|=3} \frac{z(z-i)}{e^{\pi z}+1}\, dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,-i) + \mathrm{Res}(f,3i)) = 2\pi i \left(\frac{2}{\pi} + \frac{6}{\pi}\right) = 16i\,.$$

(3) (6 pt). Calcolare il seguente integrale esprimendo il risultato in termini di quantità palesemente reali.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+6x+12}\, dx\,.$$

Risp: $\frac{2^{4/3}}{3^{5/6}}\, \pi \, \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

(4) (9 pt). Sia g una funzione analitica su tutto il piano complesso ad eccezione del punto di singolarità $z = 1+2i$ sulla quale non abbiamo informazioni. Calcolare i seguenti integrali, *esprimendo il risultato, se necessario, in termini dei valori assunti da g e dalle sue derivate in punti opportuni.* Se non ci sono informazioni sufficienti per calcolare l'integrale scrivere "non calcolabile".

$$(a) \quad \int\limits_{|z-3|=2} \frac{g(z)\,\log z}{(z-2)^3}\, dz \qquad (b) \quad \int\limits_{|z-3|=2} \frac{g(z)\,\log z}{(z+2)^3}\, dz \qquad (c) \quad \int\limits_{|z-3i|=2} \frac{g(z)\,\log z}{(z+1)^3}\, dz$$

Soluzione. (a) Sia $\gamma(t) := 3 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ il cammino di integrazione. Sia $f(z) := g(z)\, \log z$. Il cammino di integrazione è omotopo a zero nel dominio di analiticità di f. Posso quindi usare la formula integrale di Cauchy per la derivata seconda e ottengo

$$I := \int\limits_{|z-3|=2} \frac{g(z)\,\log z}{(z-2)^3}\, dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-2)^3}\, dz = 2\pi i\, n(\gamma, 2)\, \frac{f''(2)}{2!}\,.$$

Disegnando γ si vede che $n(\gamma, 2) = 1$. Inoltre

$$f''(z) = g''(z) \log z + 2\frac{g'(z)}{z} - \frac{g(z)}{z^2}\,.$$

Si ottiene così

$$I = i\pi \left[g''(2) \log 2 + g'(2) - g(2)/4 \right]\,.$$

(b) Sia

$$f(z) := \frac{g(z)\,\log z}{(z+2)^3}\,.$$

f è analitica in $G := \mathbb{C}\setminus(\{z \leq 0\} \cup \{-2, 1+2i\})$. Si vede che il cammino di integrazione è omotopo a zero in G. Per il Teorema di Cauchy si ha

$$\int_{|z-3|=2} f(z)\,dz = 0\,.$$

(c) Poiché il cammino di integrazione gira intorno al punto $1+2i$ e poiché g non è analitica in questo punto, in mancanza di altre informazioni non possiamo calcolare il valore dell'integrale.

(5) (6 pt). Sia $z = x + iy$ e $f(z) = x^3 + iy^3$. Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ in cui esiste $f'(z)$.

Schema di soluzione. Usando le condizioni di Cauchy-Riemann si ottiene facilmente che $f'(z)$ esiste se e solo se

$$x = y \quad \text{oppure} \quad x = -y\,.$$