Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3/C

Filippo Cesi – 2019–20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (10 pt). Calcolare il raggio di convergenza: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, e^{4n}}{n^n} z^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^{2n}$.

Risp: (a) e^{-3}. (b) $1/\sqrt[4]{2}$.

(2) (8 pt). Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{|z-3|=4} \frac{\cos(z/3)}{z\,(e^{iz}-1)}\, dz$.

Schema di soluzione.

$$I = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2\pi)\right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4\pi}\right) = -\frac{1}{2} - i\pi\,.$$

(3) (8 pt). Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 6\sqrt{3}x + 36}\, dx$

Risp: $\dfrac{2\sqrt[3]{2}\pi \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)}{3\sqrt[6]{3}}$

(4) (5 pt). Se $z = x + iy$, esprimere la funzione $f(z) := \mathrm{Re}[\sin(z^2)]$ in termini di funzioni reali di x e y.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}
\sin\left(z^2\right) &= \sin\left((x+iy)^2\right) = \sin\left((x^2-y^2) + i2xy\right) \\
&= \sin\left(x^2-y^2\right)\, \cos\left(i2xy\right) + \cos\left(x^2-y^2\right)\, \sin\left(i2xy\right) \\
&= \sin\left(x^2-y^2\right)\, \cosh\left(2xy\right) + i\cos\left(x^2-y^2\right)\, \sinh\left(2xy\right)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{Re}\left(\sin\left(z^2\right)\right) = \sin\left(x^2-y^2\right)\, \cosh\left(2xy\right)$$

(5) (5 pt). Sia A l'insieme dei valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz^2}$ è convergente. Determinare A e disegnarlo sul piano complesso.

Soluzione. Poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{z^2}\right)^n$$

la serie converge se e solo se $|e^{z^2}| < 1$, vale a dire

$$\exp\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right)\right) = \exp\left(x^2-y^2\right) < 1$$

che equivale a

$$x^2 - y^2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < |y|\,.$$

Si ha dunque

$$A = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : |x| < |y|\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}\, z \in (-3\pi/4, -\pi/4) \cup (\pi/4, 3\pi/4)\}\,.$$