Modelli e Metodi Matematici della Fisica. S3/F

Filippo Cesi – 2019-20

Nome	
Cognome	

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
test	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

1 pt = 0.5 trentesimi

(1) (6 pt). Calcolare la seguente distribuzione, semplificando il più possibile il risultato: $D^4\big[\cos(x^2)\,\delta_0''\big]$.

Soluzione. (a) Sia $h(x) = \cos(x^2)$. Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(x^2) & h(0) &= 1 \\ h'(x) &= -2x\sin(x^2) & h'(0) &= 0 \\ h''(x) &= -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) & h''(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\cos(x^2)\,\delta_0'' = h(x)\,\delta_0'' = \binom{2}{0}h(0)\,\delta_0'' - \binom{2}{1}h'(0)\,\delta_0' + \binom{2}{2}h''(0)\,\delta_0 = \delta_0''\,.$$

Di conseguenza

$$D^4\big[\cos(x^2)\,\delta_0''\big] = \delta_0^{(6)}\,.$$

(2) (7 pt). Data la distribuzione $\varphi = \operatorname{sgn}(x)\,e^{-x^2}$, calcolare $D^6\,[\varphi' + 2x\varphi]$.

Soluzione. Poiché

$$\varphi' = 2\delta_0\,e^{-x^2} + \operatorname{sgn}(x)e^{-x^2}(-2x) = 2\delta_0 + \operatorname{sgn}(x)e^{-x^2}(-2x) = -2x\varphi + 2\delta_0\,,$$

otteniamo

$$D^6\left[\varphi' + 2x\varphi\right] = D^6[2\delta_0] = 2\,\delta_0^{(6)}\,.$$

(3) (7 pt). Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{1}{(5x+i)^2}$.

Risp: $-\frac{2\pi}{25}\,H(t)\,t\,e^{-t/5}$.

(4) (7 pt). Calcolare il seguente integrale scritto nella notazione "dei fisici", in cui compare la "funzione composta della delta di Dirac", semplificando il più possibile il risultato (il risultato è un numero reale).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/4)\,\delta(x^2 - 7x + 12)\,dx\,.$$

Soluzione. La funzione $b(x) := x^2 - 7x + 12$ si annulla nei punti

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 4\,.$$

Inoltre si ha

$$b'(x) = 2x - 7 \qquad\qquad |b'(3)| = 1 \qquad\qquad |b'(4)| = 1$$

da cui si ottiene

$$\delta(x^2 - 7x + 14) = \delta_3 + \delta_4\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\pi/4)\,\delta(x^2 - 5x + 4)\,dx &= \delta_3(\cos(x\pi/4)) + \delta_4(\cos(x\pi/4)) \\ &= \cos(3\pi/4) + \cos(\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

(5) (9 pt). Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione $f(x) = H(x)\, e^{-2x}$, in cui H è la funzione a gradino di Heaviside

$$H(x)\, e^{-2x} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Calcolare: (a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; (b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$; (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right]$.

Soluzione. Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = 0$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}\,. \qquad ①$$

Inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-2\pi}\right)$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} - \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \left(1 - e^{-2\pi}\right)\,.$$

(b) Sfruttando il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier in $x = \pi$ ottengo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\kappa\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi} + 0\right) = \frac{e^{-2\pi}}{2}\,. \qquad ②$$

Sottraendo la ② dalla ① si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} = \frac{1 - e^{-2\pi}}{4}\,.$$

(c) Dall'uguaglianza di Parseval segue

$$\begin{aligned}\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-4x}\, dx = \left.\frac{e^{-4x}}{4\pi}\right|_{\pi}^{0} = \frac{1}{4\pi} \left(1 - e^{-4\pi}\right)\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] &= \frac{1}{4\pi} \left(1 - e^{-4\pi}\right) - \frac{|a_0|^2}{2} = \frac{1}{4\pi} \left(1 - e^{-4\pi}\right) - \frac{1}{8\pi^2} \left(1 - e^{-2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\left(1 - e^{-4\pi}\right) - \frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-2\pi}\right)^2\right]\end{aligned}$$