# [DI] Distribuzioni

**1 Problema.** Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di $x$, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad $x$).

$$(a)\ \ D[\cos(x^2)\ \mathrm{sgn}(x)] \qquad (b)\ \ D^2\big(e^{|x+1|}\big) \qquad (c)\ \ D\lfloor e^x \rfloor$$
$$(d)\ \ D^4[x^5\delta_0^{(5)}] \qquad (e)\ \ D^4[e^{x^2}\,\delta_0'']$$

*Soluzione.*

$$(a)\ \ D[\cos(x^2)\ \mathrm{sgn}(x)] = -2x\sin(x^2)\ \mathrm{sgn}(x) + 2\cos(x^2)\,\delta_0 = -2|x|\sin(x^2) + 2\,\delta_0$$
$$(b)\ \ D^2\big(e^{|x+1|}\big) = D(e^{|x+1|}\,\mathrm{sgn}(x+1)) = e^{|x+1|} + 2e^{|x+1|}\,\delta_{-1} = e^{|x+1|} + 2\,\delta_{-1}$$
$$(c)\ \ D\lfloor e^x \rfloor = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\log k}$$
$$(d)\ \ D^4[x^5\delta_0^{(5)}] = D^4[(-1)^5\,5!\,\delta_0] = -120\,\delta_0^{(4)}$$
$$(e)\ \ D^4[e^{x^2}\,\delta_0''] = D^4\Big([e^{x^2}]_{x=0}\,\delta_0'' - 2\,[D(e^{x^2})]_{x=0}\,\delta_0' + [D^2(e^{x^2})]_{x=0}\,\delta_0\Big) = \delta_0^{(6)} + 2\delta_0^{(4)}$$

**2 Problema.** Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\ \ D^3\big(xe^x\,\delta_0''\big) \qquad (b)\ \ D^8\big(x^4\,\delta_0^{(5)}\big) \qquad (c)\ \ D^2(|\sin x|)$$

*Soluzione.*

(a) $D^3\big(xe^x\,\delta_0\big) = D^3\big(-2\delta_0' + 2\delta_0\big) = 2\big(\delta_0^{(3)} - \delta_0^{(4)}\big)$

(b) Poichè

$$x^4\delta_0^{(5)} = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{n}{k}\,\big[D^k(x^4)\big]_{x=0}\,\delta_0^{(n-k)} = 5!\,\delta_0',$$

ottengo $D^8\big(x^4\,\delta_0^{(5)}\big) = 120\,\delta_0^{(9)}$.

(c) Poichè $D(\mathrm{sgn}(\sin x)) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi}$, ottengo

$$\begin{aligned}
D^2(|\sin x|) &= D^2(\mathrm{sgn}(\sin x)\ \sin x)\\
&= D\big(2\sin x\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi} + \mathrm{sgn}(\sin x)\cos x\big)\\
&= D\big(\mathrm{sgn}(\sin x)\cos x\big)\\
&= -\sin x\,\mathrm{sgn}(\sin x) + 2\cos x\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\delta_{k\pi}\\
&= -|\sin x| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\pi}\,.
\end{aligned}$$