[FE] Funzioni elementari

1 Problema. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\sin z = 2$. Disegnare accuratamente sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del rettangolo di vertici: $(-6,-10)$, $(0,-10)$, $(0,10)$, $(-6,10)$.

Soluzione. L'equazione può essere scritta come

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i\,.$$

Ponendo $w = e^{iz}$ si ottiene

$$w^2 - 4iw - 1 = 0\,,$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = i(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad w_2 = i(2-\sqrt{3}) = i(2+\sqrt{3})^{-1}\,.$$

Dalla prima ottengo

$$e^{iz} = w_1$$

che, scrivendo $z = x + iy$, fornisce

$$e^{-y}\, e^{ix} = |w_1|\, e^{i\arg w_1} = (2+\sqrt{3})\, e^{i\pi/2}\,.$$

Al valore w_1 corrispondono dunque infinite soluzioni per z date da

$$y = -\log(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad x = \pi/2 + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z = \pi/2 + 2k\pi - i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Analogamente si ottengono le soluzioni corrispondenti a w_2

$$z = \pi/2 + 2k\pi + i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi dato dalla fomula

$$z = \pi/2 + 2k\pi \pm i\log(2+\sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè $|\log(2+\sqrt{3})| < 10$, le soluzioni all'interno del rettangolo sono quelle la cui parte reale appartiene all'intervallo $[-6,0]$. Deve quindi essere

$$-6 \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 0\,.$$

L'unico valore di k che soddisfa queste disuguaglianze è chiaramente $k=-1$. Le soluzioni all'interno del rettangolo sono quindi due:

$$z_1 = -\frac{3\pi}{2} + i\log(2+\sqrt{3}) \qquad\qquad z_2 = -\frac{3\pi}{2} - i\log(2+\sqrt{3})\,.$$

2 Problema. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sinh z = -i\pi$$

e dire quante di queste cadono all'interno della regione $|\operatorname{Im} z| \le 2\pi$.

Soluzione. Si ha

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\pi$$

ovvero

$$e^{2z} + 2i\pi e^z - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = -i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1}\right)$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $\sinh z = -i\pi$ sono

$$\begin{aligned} z &= \log\left[-i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right)\right] \\ &= \log\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \qquad k \in \mathbb{Z} \\ &= \pm\log\left(\pi + \sqrt{\pi^2-1}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

in cui, nell'ultima uguaglianza, abbiamo usato il fatto che $\pi - \sqrt{\pi^2-1} = (\pi + \sqrt{\pi^2-1})^{-1}$. Di queste soluzioni, solo 4, quelle corrispondenti a $k = 0$ e $k = 1$, cadono all'interno della regione $|\operatorname{Im} z| \leq 2\pi$.

3 Problema. Calcolare, semplificando il risultato il più possibile (usare il ramo principale quando è necessario):

$$(a)\quad \operatorname{Im}(2+3i) \qquad (b)\quad \operatorname{Re}\frac{1-2i}{2+i} \qquad (c)\quad \left|\frac{i\,e^{2-5i}\,(1+i)^4}{1+3i}\right|$$

$$(d)\quad (\sqrt{3}-i)^{17} \qquad (e)\quad \left|(1+i)^{1-i}\right| \qquad (f)\quad \log(e^{i3\pi/2})$$

Soluzione.

(a) $\operatorname{Im}(2+3i) = 3$.

(b) $\operatorname{Re}\frac{1-2i}{2+i} = \operatorname{Re}\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \operatorname{Re}(-i) = 0$.

(c) $\left|\frac{i\,e^{2-5i}\,(1+i)^4}{1+3i}\right| = \frac{|i|\,|e^{2-5i}|\,|1+i|^4}{|1+3i|} = \frac{1\,e^2\,(\sqrt{2})^4}{\sqrt{10}} = \frac{4\,e^2}{\sqrt{10}}$.

(d) Passando alle coordinate polari si ha $\sqrt{3} - i = 2\,e^{-i\pi/6}$, quindi

$$(\sqrt{3}-i)^{17} = 2^{17}\,e^{-i17\pi/6} = 2^{17}\,e^{-i5\pi/6} = 2^{17}\left[\cos(-5\pi/6) + i\sin(-5\pi/6)\right] = -2^{16}\,(\sqrt{3}+i)\,.$$

(e) Si ha

$$\begin{aligned} (1+i)^{1-i} &= \exp\Big[(1-i)\log(1+i)\Big] = \exp\Big[(1-i)\big[\log|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i)\big]\Big] \\ &= \exp\Big[(1-i)\Big(\frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \exp\Big[\frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4} + i\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}\Big)\Big] \end{aligned}$$

Quindi

$$\left|(1+i)^{1-i}\right| = \exp\Big[\frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4}\Big] = \sqrt{2}\,e^{\pi/4}\,.$$

(f) $\log(e^{i3\pi/2}) = \log|e^{i3\pi/2}| + i\operatorname{Arg}(e^{i3\pi/2}) = -i\pi/2$.

4 Problema. Calcolare, semplificando il risultato il più possibile (usare il ramo principale quando è necessario):

$$(1-i)^{1+2i}$$

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{1+2i} &= \exp[(1+2i)\log(1-i)] \\
&= \exp[(1+2i)\,(\log|1-i| + i\operatorname{Arg}(1-i))] = \exp[(1+2i)\,(\log\sqrt{2} - i\pi/4)] \\
&= \exp[\log\sqrt{2} + \pi/2 + i(\log 2 - \pi/4)] \\
&= \sqrt{2}\exp[\pi/2 + i(\log 2 - \pi/4)]
\end{aligned}
$$

5 Problema. Calcolare (usare il ramo principale quando serve)

$$(a)\quad \log\big[(2+2i)^5\big] \qquad\qquad (b)\quad \big|\,(1-\sqrt{3}i)^i\,\big|$$

Soluzione. (a) Si ha

$$(2+2i)^5 = \big(2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\big)^5 = 2^{15/2}\,e^{i5\pi/4}\,,$$

quindi

$$\log\big[(2+2i)^5\big] = \log\big[|(2+2i)^5|\big] + i\operatorname{Arg}((2+2i)^5) = \frac{15}{2}\log 2 - i\frac{3\pi}{4}\,.$$

(b)

$$(1-\sqrt{3}i)^i = \exp\big[i\,\log(1-\sqrt{3}i)\big] = \exp\big[i\,(\log 2 - i\pi/3)\big] = \exp\big[\pi/3 + i\log 2\big]\,.$$

Quindi

$$\big|\,(1-\sqrt{3}i)^i\,\big| = e^{\pi/3}\,.$$

6 Problema. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^i = 1+i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Quante di queste soluzioni appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$?

Risp: Le soluzioni sono

$$z_k = \exp\big[\pi/4 + 2k\pi - i\log 2/2\big] \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le soluzioni che appartengono all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le e^{10\pi}\}$ sono 5: z_0, z_1, z_2, z_3, z_4.

7 Problema. Sia X l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^i = 1 + i\sqrt{3}$ (usare il ramo principale per definire la potenza).

(a) Determinare X.

(b) Determinare i punti di accumulazione di X in $\mathbb{C}$ (se esistono).

(c) Quante di queste soluzioni appartengono all'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 100\}$?

Risp: Si trova

$$X = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{in cui} \quad z_k := \exp\big[\pi/3 + 2k\pi - i\log 2\big]\,.$$

I punti z_k si trovano sulla semiretta uscente dall'origine che forma un angolo $\alpha = -\log 2$. Inoltre

$$|z_k| = \exp\big[\pi/3 + 2k\pi\big]\,,$$

per cui

$$\lim_{k\to-\infty} |z_k| = 0\,.$$

Quindi il punto $z = 0$ è l'unico punto di accumulazione di X. L'unica soluzione che appartiene all'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 100\}$ è z_0. Infatti

$$
\begin{aligned}
|z_0| &= e^{\pi/3} < 3^2 = 9 \\
|z_1| &= e^{7\pi/3} > e^7 > 2^7 = 128\,.
\end{aligned}
$$

8 Problema. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^z = 1-i$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 16 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Risp: Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^z = \exp(z\log(i)) = \exp\big[z(\log|i| + i\,\mathrm{Arg}\,i)\big] = e^{iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^z = 1 - i$ diventa dunque

$$e^{iz\pi/2} = 1 - i\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$iz\frac{\pi}{2} = \log|1-i| + i(\arg(1-i) + 2k\pi) = \frac{1}{2}\log 2 + i(-\pi/4 + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k - \frac{1}{2} - i\,\frac{\log 2}{\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 16 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\,\mathrm{Re}\,z| \le 8 \qquad |\,\mathrm{Im}\,z| \le 8\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 4:

$$z_{-1},\ z_0\ z_1,\ z_2\,.$$

9 Problema. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione (usare il ramo principale per definire la potenza)

$$\Big(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\Big)^z = -2\,.$$

Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 50 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Soluzione. Sia

$$w = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}\,.$$

Utilizzando il ramo principale della potenza, si ha

$$w^z = e^{z\log w} = \exp[z(\log|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w)] = \exp[-iz\pi/4]\,.$$

Devo quindi risolvere l'equazione

$$\exp[-iz\pi/4] = -2\,.$$

Le soluzioni sono

$$-iz\frac{\pi}{4} = \log|-2| + i(\arg(-2) + 2k\pi) = \log 2 + i(\pi + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

e quindi

$$z_k = \frac{4i}{\pi}\log 2 - 4 + 8k \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poichè si ha $(4\log 2/\pi) < 25$, affichè z_k si trovi all'interno del quadrato richiesto dovrà essere

$$|-4 + 8k| < 25\,.$$

I valori di k che soddisfano questa disuguaglianza sono

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\,.$$

All'interno del quadrato ci sono quindi 6 soluzioni.

10 Problema. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $i^z = i - 1$ (usare il ramo principale per definire la potenza). Disegnare sul piano complesso le soluzioni che si trovano all'interno del quadrato di lato 16 centrato nell'origine. Quante sono queste ultime?

Soluzione. Per definizione di potenza con esponente complesso, si ha

$$i^z = \exp(z \log(i)) = \exp\big[z(\log|i| + i \operatorname{Arg} i)\big] = e^{iz\pi/2}\,.$$

L'equazione $i^z = 1 - i$ diventa dunque

$$e^{iz\pi/2} = i - 1\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$iz\frac{\pi}{2} = \log|i-1| + i(\arg(i-1) + 2k\pi) = \frac{1}{2}\log 2 + i(3\pi/4 + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

vale a dire

$$z_k = 4k + \frac{3}{2} - i\,\frac{\log 2}{\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il quadrato di lato 16 centrato nell'origine è determinato dalle condizioni

$$|\operatorname{Re} z| \le 8 \qquad |\operatorname{Im} z| \le 8\,.$$

Si verifica facilmente che le soluzioni per le quali queste condizioni sono soddisfatte, sono 4:

$$z_{-2},\ z_{-1},\ z_0\ z_1\,.$$

11 Problema. Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calcolare (usare il ramo principale del log)

$$(a)\quad \operatorname{Im}(z^8) \qquad\qquad (b)\quad \log(z^8) \qquad\qquad (c)\quad |i^z|$$

Risp: (a) $2^7\sqrt{3}$. (b) $8\log 2 + i2\pi/3$. (c) $e^{-\sqrt{3}\pi/2}$.

12 Problema. Sia $z = i\sqrt{3} - 1$. Usando il ramo principale, calcolare le seguenti espressioni (il risultato deve essere un numero palesemente reale!)

$$(a)\quad \operatorname{Re}(z^{10}) \qquad\qquad (b)\quad |(-i)^z| \qquad\qquad (c)\quad \operatorname{Arg}(z^i)$$

Risp: (a) $-2^9 = -512$. (b) $e^{\pi\sqrt{3}/2}$. (c) $\log 2$.

13 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$\operatorname{Re}\big(\exp(\exp z)\big)$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\big(\exp(\exp z)\big) &= \operatorname{Re}\exp(w) && [\text{pongo } w := \exp z] \\ &= e^{\operatorname{Re} w}\,\cos(\operatorname{Im} w) \\ &= \exp\big[e^x\,\cos y\big]\,\cos\big[e^x\,\sin y\big] \end{aligned}$$

14 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere le quantità seguenti in termini di funzioni reali di x e y

$$(a)\quad \operatorname{Re}[\cosh(z^2)] \qquad\qquad (b)\quad |e^{\sin z}|$$

Soluzione. (a) Poichè $\cosh w = \cosh(\operatorname{Re} w)\,\cos(\operatorname{Im} w) + i\sinh(\operatorname{Re} w)\,\sin(\operatorname{Im} w)$, si ottiene

$$\operatorname{Re}[\cosh(z^2)] = \cosh(\operatorname{Re} z^2)\,\cos(\operatorname{Im} z^2) = \cosh(x^2 - y^2)\,\cos(2xy)\,.$$

(b) Si ha

$$|e^{\sin z}| = e^{\operatorname{Re}\sin z} = e^{\sin x\,\cosh y}\,.$$

15 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$\mathrm{Re}\big[\sinh(z^2)\big]\,.$$

Soluzione. Sfruttando le relazioni esistenti fra funzioni trigonomentriche ed iperboliche, possiamo facilmente trovare la formula di addizione per il sinh.

$$\begin{aligned}\sinh(a+b) &= -i\sin(i(a+b)) = -i(\sin(ia)\cos(ib) + \cos(ia)\sin(ib))\\ &= -i(i\sinh(a)\cosh(b) + i\cosh(a)\sinh(b)) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)\,.\end{aligned}$$

Usando questa identità ottengo

$$\begin{aligned}\sinh(z^2) &= \sinh(x^2 - y^2 + i2xy)\\ &= \sinh(x^2-y^2)\cos(2xy) + i\cosh(x^2-y^2)\sin(2xy)\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza si ha

$$\mathrm{Re}\sinh(z^2) = \sinh(x^2-y^2)\cos(2xy)\,.$$

16 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$\mathrm{Re}\big(e^{\sin z}\big)$$

Soluzione. $\mathrm{Re}\big(e^{\sin(x+iy)}\big) = e^{\mathrm{Re}\sin(x+iy)}\cos(\mathrm{Im}\sin(x+iy)) = e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)$

17 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere le quantità seguenti in termini di funzioni reali di x e y

$$(a)\quad \mathrm{Im}\left[\sin\!\big(e^z\big)\right] \qquad\qquad (b)\quad |e^{\cosh z}|$$

Soluzione. (a) Ponendo $z := x + iy$ e $w := e^z = u + iv$ si ha

$$\sin w = \sin(u+iv) = \sin u\,\cosh v + i(\cos u\sinh v)\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\sin w) &= \cos(\mathrm{Re}\,w)\sinh(\mathrm{Im}\,w) = \cos\big[\mathrm{Re}\,e^z\big]\sinh\big[\mathrm{Im}\,e^z\big]\\ &= \cos\big[e^x\cos y\big]\sinh\big[e^x\sin y\big]\end{aligned}$$

(b) Poichè

$$\cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x\cos y + i(\sinh x\sin y)$$

si ottiene

$$|e^{\cosh z}| = e^{\mathrm{Re}\cosh z} = \exp\big[\cosh x\cos y\big]\,.$$

18 Problema. Se $z = x + iy$, esprimere la quantità seguente in termini di funzioni reali di x e y

$$|e^{\cos z}|$$

Soluzione. Poichè

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\,,$$

si ha

$$|e^{\cos z}| = e^{\mathrm{Re}(\cos z)} = \exp\left[\cos x\cosh y\right]\,.$$

19 Problema. Data la funzione $f(z) = \sqrt{1 - z^3}$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di f e disegnarlo sul piano complesso

(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon \to 0^+} f\big(2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)}\big)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon \to 0^+} f\big(2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)}\big)$.

Risp: (a) Sia D il dominio di analiticità di f. Poichè dobbiamo prendere il ramo principale della radice, si ha:

$$D = \mathbb{C} \backslash X \,,$$

in cui

$$X = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z^3 \le 0\} = \{1 - z^3 = -t : t \ge 0\} \,.$$

Risolvo quindi l'equazione $1 - z^3 = -t$, dipendente dal parametro reale positivo t.

$$\begin{aligned} &z^3 = 1 + t && t \ge 0 \\ &z^3 = s && s \ge 1 \\ &z = \sqrt[3]{s}\, e^{2ik\pi/3},\ k = 0, 1, 2 && s \ge 1 \,. \end{aligned}$$

Poichè l'insieme $\{\sqrt[3]{s} : s \ge 1\}$ coincide con l'insieme $\{s : s \ge 1\}$, posso scrivere

$$X = \{s\, e^{i2k\pi/3} : s \ge 1,\ k = 0, 1, 2\} \,.$$

Si tratta di 3 semirette che partono dalla circonferenza unitaria e si dirigono radialmente verso l'esterno con angoli $0, \pm 2\pi/3$ (vedi figura).

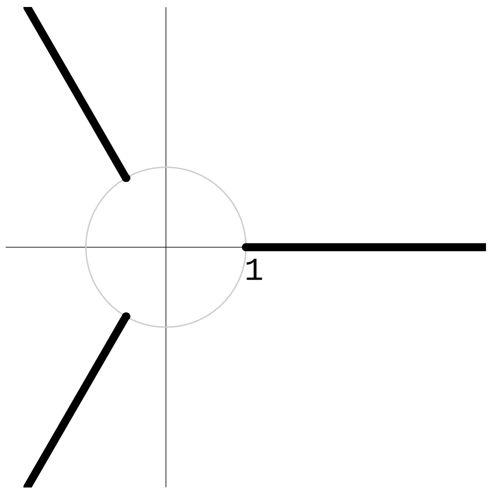

Figura 1: Dominio di analiticità di $\sqrt{1 - z^3}$.

(b) Nel seguito indicherò con ε' una generica quantità che tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Il valore di ε' può cambiare da un'equazione all'altra. Voglio calcolare

$$a_+ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f\big[\, 2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)}\,\big] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{w_\varepsilon} \,,$$

in cui

$$w_\varepsilon := 1 - (2e^{i(2\pi/3+\varepsilon)})^3 \,.$$

Poichè

$$w_\varepsilon = 1 - 8e^{i(2\pi+\varepsilon')} = 1 - 8e^{i\varepsilon'} = 1 - 8(1 - \varepsilon' + i\varepsilon') = (-7 + \varepsilon') - i\varepsilon' \,,$$

si ottiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |w_\varepsilon| = 7$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Arg} w_e = -\pi. \qquad [w_\varepsilon \text{ tende al punto } -7 \text{ arrivando } \textit{dal basso!}]$$

Quindi
$$a_+ = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{w_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{|w_\varepsilon|}\, e^{i \operatorname{Arg} w_\varepsilon/2} = \sqrt{7}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{7}\,.$$

Analogamente, per quanto riguarda a_-, poniamo

$$w_\varepsilon := 1 - (2e^{i(2\pi/3-\varepsilon)})^3$$

e si trova
$$w_\varepsilon = 1 - 8e^{i(2\pi-\varepsilon')} = 1 - 8e^{-i\varepsilon'} = 1 - 8(1-\varepsilon'-i\varepsilon') = (-7+\varepsilon') + i\varepsilon'\,.$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |w_\varepsilon| = 7$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Arg} w_e = \pi. \qquad [w_\varepsilon \text{ tende al punto } -7 \text{ arrivando } \textit{dall'alto!}]$$

Di conseguenza
$$a_- = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{w_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{|w_\varepsilon|}\, e^{i \operatorname{Arg} w_\varepsilon/2} = \sqrt{7}e^{i\pi/2} = i\sqrt{7}\,.$$

20 Problema. Data la funzione $f(z) = \log(1 + iz^2)$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di f e disegnarlo sul piano complesso
(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1+i+\varepsilon)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1+i-\varepsilon)$.

Risp: (a) Sia D il dominio di analiticità di f. Poichè dobbiamo prendere il ramo principale si ha:

$$D = \mathbb{C}\backslash X\,,$$

in cui
$$X = \{z \in \mathbb{C} : 1 + iz^2 \le 0\} = \{1 + iz^2 = -t : t \ge 0\}\,.$$

Risolvo quindi l'equazione $1 + iz^2 = -t$, dipendente dal parametro reale positivo t.

$$z^2 = i(1+t) = e^{i\pi/2}(1+t) \qquad t \ge 0$$
$$z = \sqrt{1+t}\, e^{i(\pi/4+k\pi)},\ k = 0, 1 \qquad t \ge 0\,.$$

Posso quindi scrivere, ponendo $s = \sqrt{1+t}$,

$$X = \{s\, e^{i(\pi/4+k\pi)} : s \ge 1,\ k = 0, 1\}\,.$$

Si tratta di 2 semirette che partono dalla circonferenza unitaria e si dirigono radialmente verso l'esterno con angoli $\pi/4, 5\pi/4$.

(b) Nel seguito indicherò con ε' una generica quantità che tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Il valore di ε' può cambiare da un'equazione all'altra. Voglio calcolare

$$a_+ = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(1+i+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(w_\varepsilon)\,,$$

in cui
$$w_\varepsilon := 1 + i(1+\varepsilon+i)^2\,.$$

Poichè

$$\begin{aligned} w_\varepsilon &= 1 + i(1 + \varepsilon^2 - 1 + 2\varepsilon + 2i\varepsilon + 2i) \\ &= 1 + i(\varepsilon' + i(\varepsilon + 2)) = 1 + i\varepsilon' - (\varepsilon + 2) \\ &= -1 - \varepsilon + i\varepsilon' , \end{aligned}$$

si vede che w_ε tende al punto -1 arrivando dall'alto, vale a dire dal semipiano superiore del piano complesso. Di conseguenza

$$a_+ = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(w_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big[\log|w_\varepsilon| + i\,\mathrm{Arg}(w_e) \big] = i\pi .$$

Analogamente si trova $a_- = -i\pi$.

21 Problema. Data la funzione $f(z) = \sqrt{2 + z^3}$ (ramo principale):

(a) determinare il dominio di analiticità di f

(b) calcolare $a_+ := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\big(2e^{i(\pi/3+\varepsilon)}\big)$ e $a_- := \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\big(2e^{i(\pi/3-\varepsilon)}\big)$.

Soluzione. Sia D il dominio di analiticità di f. Allora $D = \mathbb{C}\backslash X$ in cui

$$X := \{z \in \mathbb{C} : 2 + z^3 = -t,\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\} .$$

Cerco le soluzioni di

$$2 + z^3 = -t \qquad t \geq 0$$

vale a dire

$$z^3 = -t \qquad t \geq 2 .$$

Scrivendo $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $-t = te^{i\pi}$ oteniamo

$$\rho^3 = t \qquad\qquad 3\vartheta = \pi + 2k\pi \qquad\qquad t \geq 2,\ k \in \mathbb{Z} .$$

Ottengo dunque

$$D = \mathbb{C}\backslash X \qquad \text{in cui} \qquad X := \Big\{\rho e^{i\vartheta} : \rho \geq \sqrt[3]{2},\ \vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2\Big\} .$$

Calcolo ora a_+, a_-. Sia $z_+(\varepsilon) := 2e^{i(\pi/3+\varepsilon)}$. Allora

$$w_+(\varepsilon) := 2 + z_+(\varepsilon)^3 = 2 + 8\,e^{i(\pi+3\varepsilon)} .$$

È facile vedere (anche graficamente) che, quando $\varepsilon \to 0^+$, il punto $w_+(\varepsilon)$ si avvicina all'asse reale negativo *dal basso*, vale a dire dal terzo quandrante, per cui

$$\mathrm{Arg}(w_+(\varepsilon)) = -\pi + \varepsilon'$$

in cui $\varepsilon' \to 0^+$. Di conseguenza si ha

$$a_+ = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(z_+(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{w_+(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[\sqrt{|w_+(\varepsilon)|}\, e^{i\,\mathrm{Arg}(w_+(\varepsilon))/2}\Big] = \sqrt{6}\, e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{6} .$$

Analogamente si ottiene

$$w_-(\varepsilon) := 2 + z_-(\varepsilon)^3 = 2 + 8\,e^{i(\pi-3\varepsilon)} ,$$

per cui $\mathrm{Arg}(w_+(\varepsilon)) = \pi - \varepsilon'$ e dunque

$$a_- = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(z_-(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{w_-(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[\sqrt{|w_-(\varepsilon)|}\, e^{i\,\mathrm{Arg}(w_-(\varepsilon))/2}\Big] = \sqrt{6}\, e^{i\pi/2} = i\sqrt{6} .$$