[OP] Operazioni elementari sui numeri complessi

1 Problema. Calcolare arg, Arg e $\arg_+$ di

$$(a) \quad 2-3i \qquad\qquad (b) \quad -2-4i \qquad\qquad (c) \quad e^{6i}$$

Soluzione. Sia $z = x + iy$ e sia $\alpha = \arctan(y/x)$. A seconda del quandrante in cui si trova z bisogna usare regole diverse per il calcolo dei vari tipi di argomenti.

QUAD	arg	Arg	$\arg_+$
I	$\alpha + 2k\pi$	α	α
II	$\alpha + (2k+1)\pi$	$\alpha + \pi$	$\alpha + \pi$
III	$\alpha + (2k+1)\pi$	$\alpha - \pi$	$\alpha + \pi$
IV	$\alpha + 2k\pi$	α	$\alpha + 2\pi$

(a) Il numero $z := 2-3i$ si trova nel IV quadrante, quindi, poichè $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$, si ha

$$\arg z = -\arctan(3/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \operatorname{Arg} z = -\arctan(3/2) \qquad \arg_+ z = 2\pi - \arctan(3/2)\,.$$

(b) Il numero $z := -2-4i$ si trova nel III quadrante, quindi

$$\arg z = \arctan(2) + 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \operatorname{Arg} z = \arctan(2) - \pi \qquad \arg_+ z = \arctan(2) + \pi\,.$$

(c) Il numero $z := e^{6i}$ è già in forma polare. Mi devo solo preoccupare di aggiugere eventuali multipli di 2π in modo tale che $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ e $\arg_+ z \in [0, 2\pi)$. Poichè $6 \in (\pi, 2\pi)$ si ha

$$\arg z = 6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \operatorname{Arg} z = 6 - 2\pi \qquad \arg_+ z = 6\,.$$

2 Problema. Sapendo che $|z| = 10$, determinare la maggiorazione

$$\left|\frac{z^4 + 2iz + 5}{z^2 + 3z - 22i}\right| \le ?$$

Soluzione. Per maggiorare un quoziente devo maggiorare il numeratore e *minorare* il denominatore. Usando la disugualianza triangolare ottengo

$$|z^4 + 2iz + 5| \le |z^4| + |2iz| + |5| = |z|^4 + 2|z| + 5 = 10^4 + 20 + 5 = 10025$$

Per minorare il denominatore devo usare sia la disugualianza triangolare che la “disugualianza triangolare inversa” nel modo seguente

$$\begin{aligned} |z^2 + 3z - 22i| &\ge \big||z^2| - |3z - 22i|\big| \ge |z^2| - |3z - 22i| \ge |z^2| - |3z| - |22i| \\ &= |z|^2 - 3|z| - 22 = 100 - 30 - 22 = 48\,. \end{aligned}$$

Combinado le due disugualianze ottengo

$$\left|\frac{z^4 + 2iz + 5}{z^2 + 3z - 22i}\right| \le \frac{10025}{48}\,.$$

3 Problema. Calcolare

$$(a) \quad \operatorname{Re}(i^{734}) \qquad (b) \quad \operatorname{Re}\frac{2+i}{2-i} \qquad (c) \quad \operatorname{Im}\left[e^{i\pi/4}\,(1+i)^5\,(\sqrt{3}-i)^3\right]$$

Soluzione. (a) Siccome

$$i^{734} = i^{367\cdot 2} = (i^2)^{367} = (-1)^{367} = -1\,,$$

si ha $\mathrm{Re}(i^{734}) = -1$.

(b) Moltiplicando numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore ottengo

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{5} = \frac{3+4i}{5}\,,$$

quindi

$$\mathrm{Re}\,\frac{2+i}{2-i} = \frac{3}{5}\,.$$

(c) Poichè ci sono potenze da calcolare conviene usare la forma polare, quindi

$$\begin{aligned} e^{i\pi/4}\,(1+i)^5\,(\sqrt{3}-i)^3 &= e^{i\pi/4}\,\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^5\,\left(2e^{-i\pi/6}\right)^3 \\ &= e^{i\pi/4}\,2^{5/2}e^{i5\pi/4}\,8e^{-i\pi/2} \\ &= 32\sqrt{2}\,e^{i\pi} = -32\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{Im}\left[e^{i\pi/4}\,(1+i)^5\,(\sqrt{3}-i)^3\right] = 0\,.$$

4 Problema. Descrivere a parole e graficamente le regioni seguenti

(a) $|z-i+5| = 3$ $\quad$ (b) $|3z+i| \geq 1$ $\quad$ (c) $\mathrm{Re}(\bar{z}+2i) \leq 5$

(d) $\mathrm{Re}(\bar{z}) \leq \mathrm{Im}(z)$ $\quad$ (e) $|z-a| - |z+a| = 2c$ con a, c reali positivi, $c < a$

(f) $|z-1| - |z+i| = 0$ $\quad$ (g) $|z-1| + |z+i| = 0$ $\quad$ (h) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| \leq 1$

(c) Sia $A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\bar{z}+2i) \leq 5\}$. Ponendo $z = x+iy$, si ha

$$\mathrm{Re}(\bar{z}+2i) = \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) = x\,,$$

quindi

$$A := \{z \in \mathbb{C} : x \leq 5\}\,.$$

A è il semipiano chiuso alla sinistra della retta $x = 5$.

(h) Sia

$$A := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z}{z+1}\right| \leq 1\right\}\,.$$

Il bordo di A è dato da

$$\partial A := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z}{z+1}\right| = 1\right\}\,.$$

I punti di ∂A soddisfano

$$|z| = |z+1| \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{dist}(z,0) = \mathrm{dist}(z,-1)$$

quindi si tratta dell'asse del segmento $[-1,0]$, vale a dire la retta R di equazione $x = -1/2$. L'insieme A è dunque uno dei 2 semipiani delimitati da questa retta. Per capire quale dei 2 osservo che il punto $z = 0$ appartiene ad A. Dunque A è il semipiano chiuso a destra di R.

5 Problema. Calcolare, semplificando il risultato il più possibile (usare il ramo principale quando è necessario):

$$(a) \quad \left| \frac{i\, e^{3+7i}\, (1-i)^5}{(2+i)^2} \right| \qquad\qquad (b) \quad (1-i\sqrt{3})^{50}$$

Soluzione. (a)

$$\left| \frac{i\, e^{3+7i}\, (1-i)^5}{(2+i)^2} \right| = \frac{|i|\, |e^{3+7i}|\, |1-i|^5}{|2+i|^2} = \frac{e^3\ 2^{5/2}}{5}\,.$$

(b)

$$(1-i\sqrt{3})^{50} = \left(2\, e^{-i\pi/3}\right)^{50} = 2^{50}\, e^{-i50\pi/3} = 2^{50}\, e^{-i\pi(16+2/3)} = 2^{50}\, e^{-i2\pi/3} = -2^{49}\,(1+i\sqrt{3})\,.$$

6 Problema. Calcolare

$$\operatorname{Arg}\left(-3e^{i22\pi/7}\right)$$

Soluzione. Poichè

$$-3e^{i22\pi/7} = 3e^{i29\pi/7} = 3e^{i(4\pi+\pi/7)} = 3e^{i\pi/7}\,,$$

si ha

$$\operatorname{Arg}\left(-3e^{i22\pi/7}\right) = \frac{\pi}{7}\,.$$