[RS] Residui

1 Problema. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

(a) Trovare tutte le singolarità isolate di f e determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine).
(b) Calcolare $\int_\gamma f$ in cui $\gamma(t) := i\pi/2 + 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Soluzione. Poichè $\sinh z$ ha zeri semplici in $ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f ha un polo di ordine 3 in $z = 0$ e un polo semplice in $z = ik\pi$, k intero, $k \neq 0$.
La curva γ gira una volta in senso antiorario attorno ai 2 poli 0 e $i\pi$, mentre gli altri poli si trovano all'esterno di γ, quindi

$$I := \int_\gamma f = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,i\pi)\big].$$

Per calcolare il residuo in 0 scrivo:

$$\sinh z = z + z^3/6 + \mathcal{O}(z^5)$$

dunque

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3\,(1 + z^2/6 + \mathcal{O}(z^4))} = \frac{1}{z^3}\,(1 - z^2/6 + \mathcal{O}(z^4)) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \mathcal{O}(z).$$

Abbiamo quindi

$$\mathrm{Res}(f,0) = -1/6.$$

Inoltre, poichè $i\pi$ è un polo semplice

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = \frac{1}{(i\pi)^2 \cosh(i\pi)} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Ottengo così

$$\int_\gamma f = 2\pi i\Big[\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{6}\Big].$$

2 Problema. Trovare tutte le singolarità isolate di f. Per ciascuna di esse determinarne la natura (per i poli trovare l'ordine) e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 \sin z}.$$

Soluzione. Si osservi che $\sin z = 0$ nei punti $z_n = \pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Per $n \neq 0$, $z^2 \sin z$ ha uno zero semplice in z_n e e^{z_n} è diverso da zero. Quindi f ha in z_n un polo semplice con

$$\mathrm{Res}_{z=z_n} f(z) = \frac{e^z}{2z\sin z + z^2\cos z}\bigg|_{z=z_n} = (-1)^n \frac{e^{n\pi}}{n^2\pi^2}$$

In z_0, $z^2 \sin z$ ha uno zero triplo e $e^{z_0} \neq 0$. Pertanto f ha in z_0 un polo di ordine 3. Il corrispondente residuo si trova facilmente sviluppando f in serie di Laurent nella regione $0 < |z| < \pi$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)}{z^2(z - z^3/6 + \mathcal{O}(z^5))} \\ &= \frac{1}{z^3}(1 + z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3))(1 + z^2/6 + \mathcal{O}(z^4)) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{3z} + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{2}{3}$$

3 Problema. Calcolare

$$(a) \quad \int_{|z|=3} \frac{z}{(z-4)\,(z-2)\,(z+1)}\,dz \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z-1|=1} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz$$

Soluzione. (a) Si vede immediatamente che

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-4)\,(z-2)\,(z+1)}\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,2)+\mathrm{Res}(f,-1)\big)$$

Essendo entrambi poli semplici

$$\mathrm{Res}(f,2) = \frac{z}{(z-4)\ (z+1)}\bigg|_{z=2} = -\frac{1}{3}$$
$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{z}{(z-4)\ (z-2)}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{15}\,.$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-4)\,(z-2)\,(z+1)}\,dz = -\frac{4}{5}\pi i\,.$$

(b) L'equazione $z^4+1=0$ ha 4 radici semplici nei punti

$$z_k = e^{i(\pi/4+k\pi/2)} \qquad k=0,1,2,3\,,$$

quindi l'integrando ha 4 poli semplici in z_0, z_1, z_2, z_3. Gli unici poli che si trovano all'interno della circonferenza paercorsa da γ sono

$$z_0 = e^{i\pi/4} \qquad\qquad z_3 = e^{i3\pi/4} = e^{-i\pi/4} = \overline{z_0}\,,$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_3)\big)\,.$$

Si ottiene

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} \qquad\qquad \mathrm{Res}(f,z_3) = \frac{z_3^2}{4z_3^3} = \frac{1}{4z_3}\,.$$

da cui

$$\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_3) = \frac{1}{4z_0}+\frac{1}{4z_3} = \frac{1}{4z_0}+\frac{1}{4\overline{z_0}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big(\frac{1}{z_0}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,e^{-i\pi/4} = \frac{1}{2}\,\cos(\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}\,.$$

4 Problema. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-2)(z^2+1)} \qquad \gamma(t) := 1+i+2e^{it},\ 0\le t\le 2\pi$$

Soluzione. Posto $f(z) = z/(z-2)(z^2+1)$, f ha 3 poli semplici in 2 e $\pm i$. I poli in 2 e i sono interni alla circonferenza γ quello in $-i$ esterno, pertanto

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-2)(z^2+1)} = 2\pi i\,(\mathrm{Res}_{z=2} f(z) + \mathrm{Res}_{z=i} f(z)) = 2\pi i\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{2i(i-2)}\right) = \frac{\pi}{5}(1+2i)$$

5 Problema. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2\,dz}{e^{\pi z}+1} \qquad \gamma(t) := 1+2i+2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Soluzione. Si osservi che il cammino di integrazione è il cerchio di raggio 2, centrato nel punto $1+2i$ e orientato positivamente. La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici di $e^{\pi z}+1$. Tali zeri sono $z_k = i(1+2k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Per il teorema dei residui si conclude

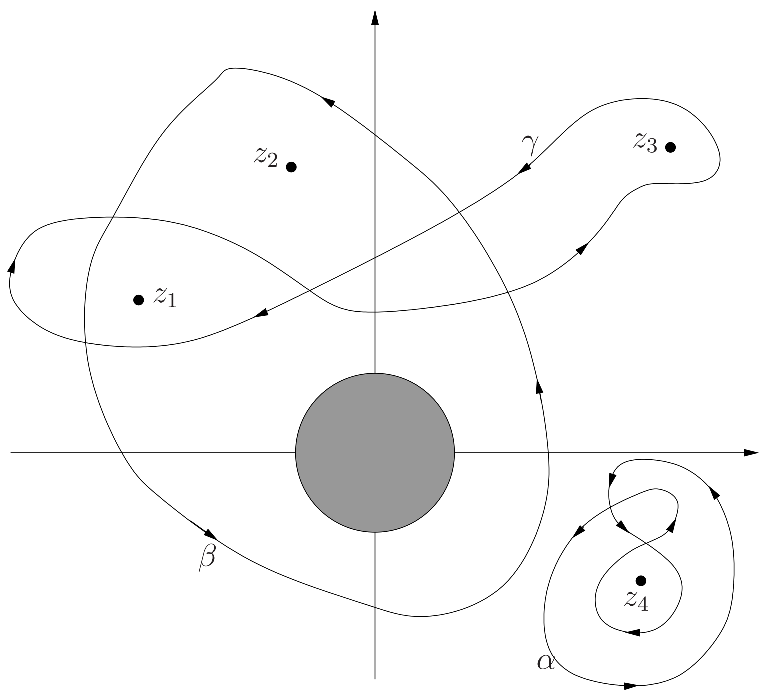
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z^2\,dz}{e^{\pi z}+1} &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=z_0}\frac{z^2}{e^{\pi z}+1} + \mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{z^2}{e^{\pi z}+1}\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{z_0^2}{\pi e^{\pi z_0}} + \frac{z_1^2}{\pi e^{\pi z_1}}\right)\\ &= 20i\end{aligned}$$

6 Problema. Calcolare

$$\int_\gamma \cos(z)\, e^{1/z^2}\,dz \qquad \gamma(t) := 1+5e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Soluzione. L'integrale è nullo perchè la serie di Laurent dell'integrando contiene solo potenze pari di z.

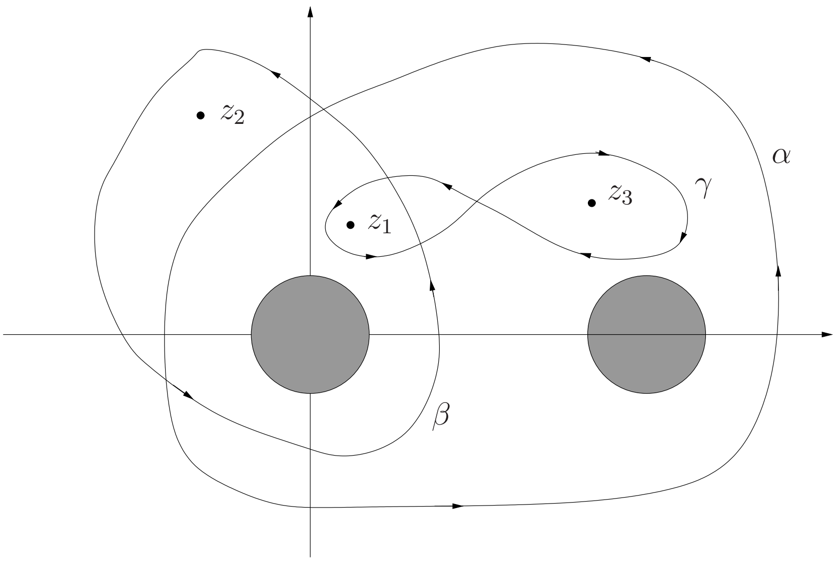
7 Problema. Sia f una funzione analitica su $\mathbb{C}$ ad eccezione delle singolarità isolate z_1, z_2, z_3, z_4 e del disco $\overline{B}_1$ (vedi figura). Non abbiamo alcuna informazione sul comportamento di f in $\overline{B}_1$. Esprimere le quantità $\int_\alpha f$, $\int_\beta f$ e $\int_\gamma f$ in termini di opportuni residui (incluso, se necessario, il residuo all'infinito).



Risp:

$$\int_\alpha f = 0$$
$$\int_\beta f = -2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,z_3) + \mathrm{Res}(f,z_4) + \mathrm{Res}(f,\infty)\big)$$
$$\int_\gamma f = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,z_3) - \mathrm{Res}(f,z_1)\big)$$

8 Problema. Sia f una funzione analitica su $\mathbb{C}$ ad eccezione delle singolarità isolate z_1, z_2, z_3 e dei due dischi indicati in figura. Non abbiamo alcuna informazione sul comportamento di f all'interno dei due dischi. Esprimere le quantità $\int_\alpha f$, $\int_\beta f$ e $\int_\gamma f$ in termini di opportuni residui (incluso, se necessario, il residuo all'infinito). Se le informazioni non sono sufficienti a determinare il valore dell'integrale scrivere: non calcolabile.



Risp:

$$\int_\alpha f = -2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,\infty) + \mathrm{Res}(f,z_2)]$$
$$\int_\beta f = \text{non calcolabile}$$
$$\int_\gamma f = 2\pi i\,[\mathrm{Res}(f,z_1) - \mathrm{Res}(f,z_3)]$$