[SF] Serie di Fourier

1 Problema. Sviluppare la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivere esplicitamente i primi 6 termini non nulli dello sviluppo. Utilizzare il risultato per calcolare la somma delle seguenti serie

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$
(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$

Soluzione. I coefficienti a_k sono nulli perché la funzione è dispari.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\, \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\, \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k}\,.$$

Quindi

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n,\ n = 1, 2, \dots \\ \frac{4}{\pi k} & \text{se } k = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere lo sviluppo richiesto

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1} \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(11x)}{11} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Poiché la serie converge puntualmente in $x = \pi/2$ si ha

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\,.$$

Di conseguenza

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Analogamente, dalla convergenza nel punto $x = \pi/3$, si ottiene

$$1 = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} \cdots\right],$$

per cui

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

2 Problema. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sia S_n la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata. Calcolare il limite $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(a)\ \ f(x) = x^3 \qquad\qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - x^2 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Soluzione. (a). Si tratta di una funzione differenziabile a tratti, quindi vale il teorema che assicura la convergenza di $S_n(x)$ al valore $f(x)$ nei punti in cui f è continua, al valore $(f(x^-) + f(x^+))/2$ nei punti in cui f ha un salto.
Attenzione: per studiare la convergenza agli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ bisogna sempre pensare al *prolungamento periodico* di f.

Mentre la funzione x^3 è continua in $[-\pi,\pi]$, il suo prolungamento periodico è continuo nei punti interni all'intervallo, cioè è continuo in $(-\pi,\pi)$ ma ha un salto nei punti $x=-\pi$ e $x=\pi$. In entrambi questi punti il limite da sinistra vale π^3, mentre il limite da destra vale $-\pi^3$. Quindi ottengo, per $x=\pm\pi$,

$$S(\pm\pi)=\frac{1}{2}\big(f(\pi^-)+f(\pi^+)\big)=\frac{1}{2}\big(\pi^3-\pi^3\big)=0\,.$$

Riassumendo

$$S(x)=\begin{cases}x^3 & \text{se } x\in(-\pi,\pi)\\ 0 & \text{se } x=-\pi \text{ o } x=\pi\end{cases}$$

(b). I punti di discontinuità del prolungamento periodico di f sono $x=-\pi$, $x=0$ e $x=\pi$. Quindi

$$\begin{aligned}S(\pm\pi)&=\frac{1}{2}\big(f(\pi^-)+f(\pi^+)\big)=\frac{1}{2}\big(1-\pi^2+0\big)=\frac{1-\pi^2}{2}\\ S(0)&=\frac{1}{2}\big(f(0^-)+f(0^+)\big)=\frac{1}{2}\big(0+1\big)=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Riassumendo

$$S(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in(-\pi,0)\\ 1/2 & \text{se } x=0\\ 1-x^2 & \text{se } x\in(0,\pi)\\ (1-\pi^2)/2 & \text{se } x=-\pi \text{ o } x=\pi\end{cases}$$