[SL] Serie di Laurent

1 Problema. Trovare la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent in $z = 0$ di f

$$f(z) = \frac{e^z}{z\,(1 - \cos z)}$$

Soluzione. Il punto $z = 0$ è un polo di ordine 3. Tenendo i primi 3 termini non nulli dello sviluppo

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3) \\ 1 - \cos z &= z^2/2 - z^4/4! + \mathcal{O}(z^6)\,, \end{aligned}$$

si ottiene facilmente

$$f(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{7}{6z} + \mathcal{O}(1)\,.$$

2 Problema. Sviluppare in serie di Laurent negli insiemi indicati. Scrivere sia lo sviluppo completo che lo sviluppo esplicito di tutti i termini non nulli $c_n(z - z_0)^n$ con n compreso fra -2 e 1.

$$f(z) = \frac{z^2 + 5z - 10}{(z-1)^2\,(z+3)} \qquad\qquad (a)\ \ \dot{B}_4(1), \quad (b)\ \ \dot{B}_4(-3)$$

Soluzione. (a) Sviluppo in $\dot{B}_4(1)$. Poichè devo sviluppare con centro in $z_0 = 1$, il fattore $(z-1)^2$ che appare al denominatore di f lo metto momentaneamente da parte. Scrivo quindi

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\,g(z) \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{z^2 + 5z - 10}{z + 3}$$

Cambio variable $z = z_0 + w = 1 + w$ e sviluppo g

$$g(z) = \frac{(1+w)^2 + 5(1+w) - 10}{w + 4} = \frac{w^2 + 7w - 4}{w + 4}$$

Poiché si tratta di una funzione razionale il cui il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, eseguo la divisione con resto e ottengo

$$g(z) = w + 3 - \frac{16}{w+4}\,.$$

A questo punto posso sviluppare in serie il termine $1/(w+4)$. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} g(z) &= w + 3 - 16\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^n}{4^{n+1}} \\ &= 3 + w - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^n}{4^{n-1}} \\ &= -1 + 2w - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{w^n}{4^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{w^2} &= -\frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{n-2}}{4^{n-1}} \\ &= -\frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^n}{4^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Riesprimo il risultato finale in termini di z

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{z-1}{16} - \frac{(z-1)^2}{64} + \cdots
\end{aligned}
$$

(b) Sviluppo in $\dot{B}_4(-3)$. Poichè devo sviluppare con centro in $z_0 = -3$, il fattore $(z+3)$ che appare al denominatore di f lo metto momentaneamente da parte. Scrivo quindi

$$
f(z) = \frac{1}{(z+3)}\, g(z) \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{z^2+5z-10}{(z-1)^2}
$$

Cambio variable $z = z_0 + w = -3 + w$ e sviluppo g

$$
g(z) = \frac{(w-3)^2 + 5(w-3) - 10}{(w-4)^2} = \frac{w^2 - w - 16}{(w-4)^2}
$$

Poiché si tratta di una funzione razionale il cui il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, eseguo la divisione con resto e ottengo

$$
g(z) = 1 + \frac{7w-32}{(w-4)^2}\,.
$$

A questo punto posso sviluppare in serie il termine $1/(w-4)^2$. In questo modo si ottiene

$$
\begin{aligned}
g(z) &= 1 + (7w-32)\, D\big(\frac{1}{4-w}\big) \\
&= 1 + (7w-32) D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{4^{n+1}} \\
&= 1 + (7w-32) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n w^{n-1}}{4^{n+1}} \\
&= 1 + 7\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n w^n}{4^{n+1}} - 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) w^n}{4^{n+2}} \\
&= -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{7n}{4^{n+1}} - \frac{2(n+1)}{4^n}\Big) w^n \\
&= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+8}{4^{n+1}} w^n
\end{aligned}
$$

A questo punto reintroduciamo il fattore $1/(z+3) = 1/w$ e otteniamo lo sviluppo di f

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{g(z)}{w} &= -\frac{1}{w} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+8}{4^{n+1}} w^{n-1} = -\frac{1}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+9}{4^{n+2}} w^n \\
&= -\frac{1}{z+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+9}{4^{n+2}} (z+3)^n \\
&= -\frac{1}{z+3} - \frac{9}{16} - \frac{5}{32}(z+3) - \frac{11}{256}(z+3)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

3 Problema. Determinare le singolarità isolate, la loro natura, e, per i poli, trovare l'ordine.

$$(a)\quad \frac{z^2(z^2-4)}{1-\cos(2\pi z)} \qquad\qquad (b)\quad \frac{\sin(1/z)}{z^2(z^2+1)}$$

Soluzione. (a) Numeratore e denominatore sono funzioni intere, quindi il quoziente è analitico ovunque tranne quando si annulla il denominatore. Cerco gli zeri del denominatore

$$\begin{aligned} &D(z) := 1-\cos(2\pi z) = 0 \\ &2\pi z = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'insieme delle singolarità è dato da

$$S := \{z_k = k : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\,.$$

Sviluppo il denominatore nell'intorno di ciascuna sigolarità z_k ponendo $z = z_k + w = k + w$ e ottengo

$$\begin{aligned} D(z) &= 1-\cos[2\pi(z_k+w)] = 1-\cos(2\pi k + 2\pi w) = 1-\cos(2\pi w) \\ &= 1-\Big(1-\frac{1}{2}(2\pi w)^2 + \mathcal{O}(w^4)\Big) = 2\pi^2 w^2 + \mathcal{O}(w^4) \\ &= 2\pi^2(z-k)^2 + \mathcal{O}((z-k)^4)\,. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$z_k = k \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } D(z) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

D'altra parte, per quanto riguarda il numeratore $N(z)$, si ha evidentemente

$$\begin{aligned} &z = 0 \text{ è uno zero di molteplicità 2 di } N(z) \\ &z = 2 \text{ e } z = -2 \text{ sono zeri di molteplicità 1 di } N(z) \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) si ottiene per il quoziente $f(z) = N(z)/D(z)$

$$\begin{aligned} &z = 0 \text{ è una singolarità eliminabile di } f \\ &z = 2 \text{ e } z = -2 \text{ sono poli di ordine 1 di } f \\ &z = k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0,2,-2\} \text{ è un polo di ordine 2 di } f\,. \end{aligned}$$

(b). Risposta:

$$\begin{aligned} &z = 0 \text{ è una singolarità essenziale} \\ &z = i \text{ e } z = -i \text{ sono poli di ordine 1} \end{aligned}$$