[SP] Serie di potenze

1 Problema. Calcolare il raggio di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^3} z^n$$

Soluzione. Grazie alla formula di Stirling si ha

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,,$$

in cui il simbolo $\sim$ indica che il rapporto fra il membro a destra e quello a sinistra è uguale ad 1. Di conseguenza si ottiene

$$a_n := \frac{e^{n^2}}{(n!)^3} \sim \frac{e^{n^2+3n}}{n^{3n}\,(2\pi n)^{3/2}}\,.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{n^2+3n}}{n^{3n}\,(2\pi n)^{3/2}}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+3}}{n^3\,(2\pi n)^{3/(2n)}} = \infty\,.$$

Il raggio di convergenza è quindi uguale a 0.

2 Problema. Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, e^{-\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, e^{-n^2}\, z^n$$

Soluzione. (a) Si ha

$$|a_n|^{1/n} = \left|3^n\, e^{-\sqrt{n}}\right|^{1/n} = 3\, e^{-1/\sqrt{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3\,.$$

Quindi il raggio di convergenza è 1/3.

(b) Si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n!}{(n+1)!}\, e^{(n+1)^2-n^2} = \frac{e^{2n+1}}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Quindi il raggio di convergenza è ∞.

3 Problema. Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{2n-\sqrt{n}}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \big[\log(1+n)\big]^4 z^n$$

Soluzione. Si ha

$$|a_n|^{1/n} = \left|n\, e^{2n-\sqrt{n}}\right|^{1/n} = \sqrt[n]{n}\exp\left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} e^2\,,$$

quindi $R = e^{-2}$.

(b) Si ha

$$\begin{aligned} |a_n|^{1/n} &= \left|\big[\log(1+n)\big]^4\right|^{1/n} = \big[\log(1+n)\big]^{4/n} \\ &= \exp\left(\frac{4}{n}\log\log(1+n)\right) \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1\,, \end{aligned}$$

quindi $R = 1$.

4 Problema. Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{3n}}\, z^n$$

$$(b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n \qquad a_n = \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ è primo} \\ 5^n & \text{se } n \text{ non è primo} \end{cases}$$

Risp: (a) e^2. (b) $1/5$.

5 Problema. Calcolare il raggio di convergenza

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5\,(2n)!}{(n!)^2}\, z^n \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^{4n}\, z^{3n}$$

Soluzione. (a) Il fattore n^5 non influisce sul raggio di convergenza. Utilizzando ad esempio il criterio del rapporto si trova $R = 1/4$.
(b) Si ha

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{|(1-i)^{4n}|} = |1-i|^{4/3} = 2^{2/3}\,,$$

quindi $R = 2^{-2/3}$.

6 Problema. Sia A l'insieme di quei valori $z \in \mathbb{C}$ tali che la seguente serie di funzioni è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z-i}\right)^n .$$

Determinare matematicamente l'insieme A e disegnarlo sul piano complesso.

Soluzione. Ponendo $w = (z-1)/(z-i)$ si ottiene la serie geometrica che converge per $|w| < 1$, vale a dire

$$|z-1| < |z-i|\,.$$

L'insieme A è dunque l'insieme dei punti del piano complesso la cui distanza da 1 è inferiore alla distanza da i. Si tratta del semipiano aperto che si trova al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante.