[ST] Sviluppi in serie di Taylor

1 Problema. Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine z^3 della funzione

$$\frac{z\,e^z}{\cosh z}$$

Soluzione. Poichè, per $z \to 0$, ottengo

$$f(z) = \frac{z\,e^z}{\cosh z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\mathcal{O}(z)\,\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(z)$$

è necessario tenere 3 termini nello sviluppo. Quindi il numeratore va sviluppato fino a z^3 e il denominatore fino a z^2.

$$\begin{aligned} N(z) &= z\big[1 + z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\big] = z + z^2 + z^3/2 + \mathcal{O}(z^4) \\ D(z) &= 1 + z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{1}{D(z)} &= \frac{1}{1 + z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)} \\ &= \frac{1}{1+w} && \text{ho posto } w := z^2/2 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= 1 - w + \mathcal{O}(w^2) \\ &= 1 - w + \mathcal{O}(z^4) && \text{poichè } w = \mathcal{O}(z^2) \\ &= 1 - z^2/2 + \mathcal{O}(z^4) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \big[z + z^2 + z^3/2 + \mathcal{O}(z^4)\big]\,\big[1 - z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)\big] \\ &= z + z^2 + z^3/2 + \mathcal{O}(z^4) - z^3/2 = z + z^2 + \mathcal{O}(z^4)\,. \end{aligned}$$

2 Problema. Dovendo sviluppare la funzione indicata in serie di Taylor in $z = 0$ fino all'ordine z^6, fino a quale ordine è necessario sviluppare: (i) $\sin z$, (ii) $\cos z$, (iii) $\sinh z$

$$\frac{\sin^2 z\,(\cos z - 1)^2}{z^3 + \sinh(z^4)}$$

Soluzione. Poichè

$$f(z) = \frac{\sin^2 z\,(\cos z - 1)^2}{z^3 + \sinh(z^4)} = \frac{\mathcal{O}(z^2)\,\mathcal{O}(z^4)}{\mathcal{O}(z^3)} = \mathcal{O}(z^3)\,,$$

dobbiamo sviluppare ogni fattore moltiplicativo di f in serie di Taylor, calcolando esplicitamente i primi 4 termini a partire dal primo termine non nullo, vale a dire

$$\begin{aligned} \sin z &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \mathcal{O}(z^5) \\ \cos z - 1 &= c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \mathcal{O}(z^6) \\ z^3 + \sinh(z^4) &= c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + \mathcal{O}(z^7)\,. \end{aligned}$$

Useremo quindi i seguenti sviluppi

$$\sin z = z - z^3/6 + \mathcal{O}(z^5) \qquad \cos z = 1 - z^2/2 + z^4/24 + \mathcal{O}(z^6) \qquad \sinh(z^4) = z^4 + \mathcal{O}(z^{12})\,.$$