[TI] Tecniche di integrazione

1 Problema. Si consideri l'integrale

$$I := \int_0^\infty \frac{x\,\sin x\,dx}{x^4+1}\,.$$

(a) Scrivere chiaramente la relazione che lega la quantità I al valore di alcuni residui di un'opportuna funzione complessa

(b) Calcolare I semplificando il risultato il più possibile.

Risp: $\frac{\pi}{2}\sin(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}dz \qquad\qquad \gamma_R=[-R,R]+Re^{it}\ t\in[0,\pi] \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=z_0}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}+\operatorname{Res}_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

dove $z_k=e^{i(\pi+2\pi k)/4}$, $k=0,1,2,3$, sono le 4 soluzione distinte di $z^4+1=0$. Nei poli semplici z_0 e z_1 (quelli che si trovano all'interno del cammino di integrazione γ) i residui valgono

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\frac{z_0e^{iz_0}}{4z_0^3}=\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}(\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2}))$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}=\frac{z_1e^{iz_0}}{4z_1^3}=-\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}(\cos(1/\sqrt{2})-i\sin(1/\sqrt{2}))$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[2\pi i\frac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}\Big(\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2})-\cos(1/\sqrt{2})+i\sin(1/\sqrt{2})\Big)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\sin(1/\sqrt{2})e^{-1/\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2 Problema. Calcolare

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,.$$

Soluzione. Chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano superiore, otteniamo

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,dx \\
&= \operatorname{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2-2x+2)^2}\,dx \\
&= \operatorname{Re}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}\,dz}{(z^2-2z+2)^2}\right] \qquad\qquad \gamma_R=[-R,R]+Re^{it}\ t\in[0,\pi] \\
&= \operatorname{Re}\big[2\pi i\ \operatorname{Res}\big(g(z),1+i\big)\big]\ ,
\end{aligned}$$

in cui

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 - 2z + 2)^2} \,.$$

Poniamo

$$z_+ := 1 + i \qquad\qquad z_- := 1 - i \,.$$

Trattandosi di un polo di ordine 2, posso scrivere

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\big(g(z), z_+\big) &= \lim_{z \to z_+} D\left[(z - z_+)^2\, g(z)\right] \\
&= \lim_{z \to z_+} D\left[\frac{e^{iz}}{(z - z_-)^2}\right] \\
&= \lim_{z \to z_+} \frac{ie^{iz}(z - z_-)^2 - 2e^{iz}(z - z_-)}{(z - z_-)^4} \\
&= e^{iz_+} \frac{i(z_+ - z_-)^2 - 2(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\
&= e^{iz_+} \frac{i(z_+ - z_-) - 2}{(z_+ - z_-)^3} \\
&= -e^{-1+i} \frac{4}{(2i)^3} = e^{-1+i} \frac{1}{2i}
\end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left(e^{-1+i} \frac{1}{2i}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\pi e^{-1+i}\right] = \frac{\pi \cos(1)}{e} \,.$$

3 Problema. Calcolare

$$(a) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x \, dx}{x^2 - 2x + 5} \qquad\qquad (b) \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x^2 - 2x + 4}$$

Schema di soluzione. (a).

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x \, dx}{x^2 - 2x + 5} = \operatorname{Im} \int \frac{e^{iz}\, dz}{z^2 - 2z + 5} = \operatorname{Im}\left[2\pi i \ \operatorname{Res}(f, 1 + 2i)\right] = \frac{\pi}{2e^2} \sin(1) \,.$$

(b). Denotando con $[z^\alpha]^+$ il ramo "+" di z^α, vale a dire quello con il taglio lungo il semiasse reale positivo, ottengo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x^2 - 2x + 4} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi/3}} \left[\operatorname{Res}(f, 1 + \sqrt{3}i) + \operatorname{Res}(f, 1 - \sqrt{3}i)\right] \\
&= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi/3}} \frac{\left[(1 + \sqrt{3}i)^{1/3}\right]^+ - \left[(1 - \sqrt{3}i)^{1/3}\right]^+}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2}\pi}{1 - e^{i2\pi/3}} \frac{e^{i\pi/9} - e^{i5\pi/9}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt[3]{2}\pi}{3} \sin(2\pi/9) \,.
\end{aligned}$$