[TF] Trasformate di Fourier

1 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Cosa si può affermare, nei casi seguenti, sul grado di derivabilità di $\hat{f}$ senza doverla calcolare?

$$(a)\quad f(x) = x^7 e^{-\sqrt{|x|}} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \qquad\qquad (c)\quad f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

Soluzione.
(a) Poiché $x^n f \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}$ è infinitamente differenziabile.
(b) In questo caso $f \in L_1(\mathbb{R})$ ma $xf \notin L_1(\mathbb{R})$, quindi non possiamo affermare nulla sulla derivabilità di $\hat{f}$.
(c) Si vede che le funzioni f e xf appartengono a $L_1(\mathbb{R})$ ma $x^2 f \notin L_1(\mathbb{R})$, quindi $\hat{f}$ è di classe C^1.

2 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{1+x^6} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & \text{se } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione.
(a) Poiché $x^k f \in L_1$, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$ $\hat{f} \in C^4$.
Poiché $f \in C^\infty$ e $f^{(k)} \in L_1$ per tutti i k interi non negativi si ha che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k \hat{f}(\lambda) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale a dire $\hat{f}$ va a zero all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza.
(b) La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.
Voglio trovare il massimo valore di p tale che $f \in C^{p-1}$ con $f^{(p)}$ continua a tratti. Gli unici punti in cui f o le sue derivate possono essere discontinue sono i due punti di "raccordo", $x = 0$ e $x = 2\pi$. Poiché f è simmetrica rispetto al punto $x = \pi$ è sufficiente limitarsi a studiare la continuità delle derivate di f in $x = 0$. Sia $h(x) := \sin^2(x)$. Allora

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) \\ h''(x) &= 2\,\cos(2x) \end{aligned}$$

Per cui otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 & \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \sin^2(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= 0 & \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \sin(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f''(x) &= 0 & \qquad \lim_{x\to 0^+} f''(x) &= 2\cos(0) = 2\,. \end{aligned}$$

Quindi la funzione f è di classe C^1 con f'' continua a tratti. Di conseguenza $\hat{f}$ tende a zero quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^2$.

3 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^2\, e^{-|x|}$. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...

Soluzione. L'unico punto in cui le derivate di f possono avere una discontinuità è nell'origine.

$$\begin{array}{ccc}
\text{se } x<0 & \text{se } x>0 & \\
f(x)=x^2\,e^x & f(x)=x^2\,e^{-x} & f(0^-)=f(0^+) \\
f'(x)=e^x(x^2+2x) & f'(x)=e^{-x}(-x^2+2x) & f'(0^-)=f'(0^+) \\
f''(x)=e^x(x^2+4x+2) & f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2) & f''(0^-)=f''(0^+) \\
f^{(3)}(x)=e^x(x^2+6x+6) & f^{(3)}(x)=e^{-x}(-x^2+6x-6) & f^{(3)}(0^-)\neq f^{(3)}(0^+)
\end{array}$$

Ho ottenuto che f è di classe C^2 con $f^{(3)}$ continua a tratti. Inoltre f, f', f'' ed $f^{(3)}$ appartengono ad $L_1(\mathbb{R})$. Quindi posso affermare che $\lambda^3\,\hat{f}(\lambda)\to 0$ per $\lambda\to\infty$.

Poiché $x^k\,f\in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, si ha che $\hat{f}\in C^\infty(\mathbb{R})$.

4 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^p\hat{f}(\lambda)=0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...

$$(a)\quad f(x)=\frac{x-3}{1+x^4} \qquad\qquad (b)\quad f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^2 & \text{se } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Soluzione. (a) Poiché $f\in C^\infty$ e $f^{(k)}\in L_1$ per tutti i k interi non negativi si ha che $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^k\hat{f}(\lambda)=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$, vale a dire $\hat{f}$ va a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.

Poiché $x^k f\in L_1$, per $k=0,1$ si ha $\hat{f}\in C^1$.

(b) Cerco il più piccolo intero p tale che $f^{(p)}$ è discontinua. Gli unici punti di discontinuità possono essere ± 1. Per simmetria posso considerare solo $x=1$. Nell'intervallo $(-1,1)$ posso scrivere

$$\begin{array}{cc}
f(x)=x^4-2x^2+1 & f(1^-)=0=f(1^+) \\
f'(x)=4x^3-4x & f'(1^-)=0=f'(1^+) \\
f''(x)=12x^2-4 & f''(1^-)=8\neq 0=f''(1^+)\,.
\end{array}$$

Quindi $p=2$ e $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\,\hat{f}(\lambda)=0$.

La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f\in L_1$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f}\in C^\infty$.