[TF] Trasformate di Fourier

1 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Cosa si può affermare, nei casi seguenti, sul grado di derivabilità di $\hat{f}$ senza doverla calcolare?

$$(a)\quad f(x) = x^7 e^{-\sqrt{|x|}} \qquad (b)\quad f(x) = \frac{e^{ix}}{1+x^2} \qquad (c)\quad f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

Soluzione. Posso affermare che $f \in C^n(\mathbb{R})$ in cui n è il più grande intero tale che $x^n f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.
In tutti e 3 i casi si tratta di funzioni continue, quindi mi preoccupo solo dell'andamento all'infinito.
(a) Poiché

$$|x^n\, f(x)| = x^{n+7} e^{-\sqrt{|x|}} < \frac{1}{x^2} \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$

ottengo che $x^n f \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\hat{f}$ è infinitamente differenziabile.
(b) L'andamento all'infinito di $x^n f$ è

$$|x^n\, f(x)| = \frac{|x|^n}{1+x^2} \overset{[}{x} \to \pm\infty] \sim \frac{1}{|x|^{2-n}}$$

Imponendo $2 - n > 1$ ottengo $n < 1$, che, essendo n intero, è equivalente a $n \leq 0$. Quindi posso solo affermare che $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$.
(c) L'andamento all'infinito di $x^n f$ è

$$|x^n\, f(x)| = \frac{|x|^n}{1+|x|^3} \overset{[}{x} \to \pm\infty] \sim \frac{1}{|x|^{3-n}}$$

Imponendo $3 - n > 1$ ottengo $n < 2$, che, essendo n intero, è equivalente a $n \leq 1$. Quindi posso affermare che $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$.

2 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\hat{f}$ è di classe C^p e che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^q \hat{f}(\lambda) = 0$, in cui p e q valgono ...

$$(a)\quad f(x) = \frac{1}{1+x^6} \qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & \text{se } x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione.
(a) *Determino p.*
p è il più grande intero tale che $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, p$.
f è continua (addirittura C^∞) quindi mi preoccupo solo dell'andamento all'infinito di $x^k\, f(x)$

$$x^k\, f(x) \overset{[}{t} \to \infty] \sim \frac{1}{x^{6-k}} \qquad \text{integrabile se } 6 - k > 1 \quad \Longrightarrow \quad k < 5 \quad \Longrightarrow \quad \hat{f} \in C^4\,.$$

(a) *Determino q.*
Poiché $f \in C^\infty$ e $f^{(k)} \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ interi non negativi si ha che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k \hat{f}(\lambda) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale a dire $\hat{f}$ va a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza ($q = \infty$).
(b) *Determino p.*
La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.
(b) *Determino q.*
Voglio trovare il massimo valore di q tale che $f \in C^{q-1}$ con $f^{(q)}$ continua a tratti. Gli unici punti in

cui f o le sue derivate possono essere discontinue sono i due punti di "raccordo", $x = 0$ e $x = 2\pi$.
Derivabilità in 0. Derivo e mi fermo quando i limiti destri e sinistri sono diversi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 && \lim_{x\to 0^+} f(x) = \sin^2(0) = 0 \\
&\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 && \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sin x\,\cos x = \lim_{x\to 0^+} \sin(2x) = 0 \\
&\lim_{x\to 0^-} f''(x) = 0 && \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\cos(2x) = 2\,.
\end{aligned}$$

Derivabilità in π.
Si ottiene lo stesso risultato: f'' è CAT.
Quindi la funzione f è di classe C^1 con f'' continua a tratti. Di conseguenza $\hat{f}$ tende a zero quando $\lambda \to \infty$ più velocemente di $1/\lambda^2$.

3 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^2\, e^{-|x|}$. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...
Soluzione. L'unico punto in cui le derivate di f possono avere una discontinuità è nell'origine.

$$\begin{array}{ccc}
\text{se } x < 0 & \text{se } x > 0 & \\
f(x) = x^2\, e^{x} & f(x) = x^2\, e^{-x} & f(0^-) = f(0^+) \\
f'(x) = e^{x}(x^2 + 2x) & f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x) & f'(0^-) = f'(0^+) \\
f''(x) = e^{x}(x^2 + 4x + 2) & f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) & f''(0^-) = f''(0^+) \\
f^{(3)}(x) = e^{x}(x^2 + 6x + 6) & f^{(3)}(x) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6) & f^{(3)}(0^-) \neq f^{(3)}(0^+)
\end{array}$$

Ho ottenuto che f è di classe C^2 con $f^{(3)}$ continua a tratti. Inoltre f, f', f'' ed $f^{(3)}$ appartengono ad $L_1(\mathbb{R})$. Quindi posso affermare che $\lambda^3\, \hat{f}(\lambda) \to 0$ per $\lambda \to \infty$.
Poiché $x^k\, f \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

4 Problema. Sia $\hat{f}$ la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare $\hat{f}$, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p \hat{f}(\lambda) = 0$ e che $\hat{f}$ è di classe C^q in cui p e q valgono ...

$$(a)\quad f(x) = \frac{x-3}{1+x^4} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione. (a) Poiché $f \in C^\infty$ e $f^{(k)} \in L_1$ per tutti i k interi non negativi si ha che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k \hat{f}(\lambda) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale a dire $\hat{f}$ va a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.
Poiché $x^k f \in L_1$, per $k = 0, 1$ si ha $\hat{f} \in C^1$.
(b) Cerco il più piccolo intero p tale che $f^{(p)}$ è discontinua. Gli unici punti di discontinuità possono essere ± 1. Per simmetria posso considerare solo $x = 1$. Nell'intervallo $(-1, 1)$ posso scrivere

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 & f(1^-) &= 0 = f(1^+) \\
f'(x) &= 4x^3 - 4x & f'(1^-) &= 0 = f'(1^+) \\
f''(x) &= 12x^2 - 4 & f''(1^-) &= 8 \neq 0 = f''(1^+)\,.
\end{aligned}$$

Quindi $p = 2$ e $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2\, \hat{f}(\lambda) = 0$.
La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $\hat{f} \in C^\infty$.

5 Problema. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni: (a) $f(x) = x^2\, e^{-|x|}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+i)^3}$.

Soluzione. (a) Sia $g(x) := e^{-|x|}$. So che $\hat{g}(\lambda) = 2/(1+\lambda^2)$. Quindi

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[x^2\, g(x)](\lambda) = i^2\, D^2\, [\hat{g}(\lambda)] = -D^2 \left[\frac{2}{1+\lambda^2}\right] = \frac{4(1-3\lambda^2)}{(\lambda^2+1)^3}\,.$$

(b) Sia $g(t) := 1/(1+it)$. So che

$$\mathcal{F}[e^{-s}H(s)](t) = g(t) \qquad\qquad \mathcal{F}^{-1}[g(t)](s) = e^{-s}H(s)$$

Abbiamo

$$\frac{1}{(x+i)^3} = \frac{1}{2}D^2\left(\frac{1}{x+i}\right)\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x+i)^3}\right](\lambda) &= \frac{1}{2}(i\lambda)^2\mathcal{F}\left[\frac{1}{x+i}\right](\lambda) \\
&= -\frac{\lambda^2}{2}\, 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{-x+i}\right](\lambda) = -\pi\lambda^2\, \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-i}{1+ix}\right](\lambda) \\
&= i\pi\lambda^2\, \mathcal{F}^{-1}\left[g(x)\right](\lambda) = i\pi\lambda^2\, H(\lambda)\, e^{-\lambda}\,.
\end{aligned}$$