

Capitolo 12

Fit

La prima parte di questo capitolo consiste in esempi di applicazione delle formule ottenute con il metodo dei minimi quadrati. Per comodità le formule necessarie vengono riportate qui, anche se per i dettagli delle derivazioni si rimanda altrove (ad esempio la VI parte delle dispense di probabilità). Comunque, al fine di non far risultare l'argomento scollato dalla trattazione precedente, nel primo paragrafo viene introdotto il problema dal punto di vista generale.

Successivamente viene proposto un metodo grafico che permette di ottenere gli stessi risultati dei fit fatti "automaticamente" mediante le formule di cui sopra. Questo metodo viene illustrato mediante un esempio numerico dettagliato.

Un argomento importante è quello di come valutare le incertezze dovute ad errori sistematici che possono aver inficiato i dati sui quali sono stati fatti i fit. Il problema può essere trattato in modo formale e "automatico" introducendo la matrice di covarianza dei punti osservati (una espressione impropria per dire che "la verosimiglianza dei dati osservati è data da una distribuzione normale multivariata"). Si è preferito invece analizzare alcuni dei errori tipici che si possono presentare nelle misure e mostrare come sia possibile valutare l'incertezza associata ad essi in un modo semplice e sicuramente molto più chiaro ed istruttivo della scatola nera delle formule dei minimi quadrati con matrice di covarianza.

12.1 Inferenza sui parametri di una legge

Supponiamo di aver misurato delle coppie di grandezze fisiche, di averne osservato l'andamento su un grafico, di avere ipotizzato il tipo di funzione matematica che lega ascisse e ordinate e di voler determinare i parametri della funzione. Consideriamo il semplice caso di un andamento lineare:

$$\mu_Y = m \cdot \mu_X + c, \quad (12.1)$$

ove con μ_X e μ_Y sono i valori veri delle grandezze. m e c sono parametri di valore ignoto, ovvero numeri aleatori reali (avremmo dovuto usare le lettere maiuscole, ma, come già fatto precedentemente in altri casi preferiamo usare lo stesso simbolo con il quale tali grandezze vengono usualmente indicate).

Indichiamo con X_i e Y_i la coppia di valori osservabili, dati i parametri m, c e il valore vero μ_{X_i} (il valore vero μ_{X_i} è univocamente determinato dalla (12.1)), la cui verosimiglianza corrispondente è data, assumendo un modello normale per gli errori, da

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i | \mu_{X_i}, m, c) &= f(x_i | \mu_{X_i}, m, c) \cdot f(y_i | \mu_{X_i}, m, c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_i}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{X_i})^2}{2\sigma_{X_i}^2}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m\mu_{X_i} - c)^2}{2\sigma_{Y_i}^2}\right] \end{aligned} \quad (12.2)$$

La verosimiglianza acquista una forma più semplice quando $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$. Infatti ciò significa che μ_{X_i} è, dal punto di vista pratico, univocamente determinata dal valore osservato: $\mu_{X_i} = x_i$. La verosimiglianza si riduce¹ a

$$f(x_i, y_i | m, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Y_i}} \exp\left[-\frac{(y_i - m x_i - c)^2}{2\sigma_{Y_i}^2}\right]. \quad (12.3)$$

Se abbiamo tante coppie di valori misurati e le condizioni sperimentali sono tali che le possibili fluttuazioni delle ordinate intorno ai loro valori veri sono indipendenti, abbiamo

$$f(\underline{x}, \underline{y} | m, c) = \prod_i f(x_i, y_i | m, c), \quad (12.4)$$

ove con \underline{x} e \underline{y} sono stati indicati i vettori (n-tuple) contenenti i punti osservati. Applicando il teorema di Bayes otteniamo finalmente

$$f(m, c | \underline{x}, \underline{y}) \propto \prod_i f(x_i, y_i | m, c) \cdot f_o(m, c). \quad (12.5)$$

Assumendo una distribuzione iniziale $f_o(m, c)$ uniforme e una distribuzione finale circa normale (bivariata), il problema si riconduce a calcolare il massimo della distribuzione finale, che coincide con il massimo della verosimiglianza. Tale punto di massimo fornisce $E(m)$ ed $E(c)$. In pratica si preferisce massimizzare il logaritmo della verosimiglianza equivalente a *minimizzare* la quantità

$$\sum_i \frac{(y_i - m x_i - c)^2}{\sigma_{Y_i}^2},$$

come si può verificare facilmente. Il resto si riduce ad un esercizio di analisi.

Avendo ottenuto $E(m) = m(\underline{x}, \underline{y})$ e $E(c) = c(\underline{x}, \underline{y})$, ove $m(\cdot)$ e $c(\cdot)$ sono le funzioni che legano le migliori stime dei parametri ai dati sperimentali, si tratta di valutare $\sigma(m)$, $\sigma(c)$ e $\rho(m, c)$. Essi possono essere calcolati dalla loro definizione applicata ad $f(m, c)$ ottenuta dalla (12.5) dopo opportuna normalizzazione. L'assunzione di approssimazione a normale bivariata di $f(m, c)$

¹Se si prova a fare i conti con le regole della matematica elementare si trovano risultati divergenti. In realtà il limite va fatto integrando la funzione per tutti i valori di μ_{X_i} e quindi fare il limite per $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$. Chi è familiare con elementi di matematica avanzata riconosce in tale operazione l'uso della δ di Dirac (vedi anche prossimo paragrafo).

semplifica i calcoli, in quanto i parametri possono essere ricavati direttamente dalla forma della distribuzione senza eseguire gli integrali necessari per valutare $\sigma(m)$, $\sigma(c)$ e $\rho(m, c)$ (vedi, ad esempio, proprietà della distribuzione normale multivariata nella parte III delle dispense di probabilità).

Il modo più semplice per calcolare questi conti è quello di usare un ragionamento di inversione di probabilità del tipo “cane-cacciatore”, che funziona nei limiti che abbiamo più volte indicato (vedi paragrafo 9.6):

- i possibili valori osservati di Y_i possono verificarsi intorno ai valori veri μ_{Y_i} secondo gaussiane:

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_{Y_i}, \sigma_{Y_i});$$

- i possibili valori di X_i saranno, per le ipotesi fatte sull’assenza di errore su di essi, in corrispondenza dei loro valori veri:

$$X_i = \mu_{X_i};$$

- indichiamo con \hat{m} e \hat{c} i possibili valori che si possono ottenere, quando sono calcolati sulle possibili osservazioni utilizzando le funzioni $\hat{m} = \hat{m}(\underline{X}, \underline{Y})$ e $\hat{c} = \hat{c}(\underline{X}, \underline{Y})$ ottenute con il metodo descritto sopra;
- \hat{m} e \hat{c} sono variabili casuali dipendenti dalle variabili casuali \underline{Y} (più le costanti \underline{X}) e quindi è possibile calcolarne, mediante le usuali formule di propagazione, varianze e coefficiente di correlazione, che indichiamo con $\sigma(\hat{m})$, $\sigma(\hat{c})$ e $\rho(\hat{m}, \hat{c})$;
- passando da $\{\hat{m}, \hat{c}\}$ a $\{m, c\}$ mediante il solito ragionamento cane-cacciatore, abbiamo, finalmente (sempre assumendo che l’ipotesi di normalità sia soddisfatta):

$$\begin{aligned} m &\sim \mathcal{N}(\hat{m}, \sigma(\hat{m})) \\ c &\sim \mathcal{N}(\hat{c}, \sigma(\hat{c})) \\ \rho(m, c) &\approx \rho(\hat{m}, \hat{c}). \end{aligned}$$

12.2 * Come tener conto anche di possibili incertezze sulle X

Per affrontare il problema dal punto di vista più generale possibile, si noti come la (12.2) permette di fare una inferenza su tutte le grandezze incerte (in numero di $n + 2$, con n pari al numero di punti sperimentali), ovvero:

$$\begin{aligned} f(\underline{\mu}_X, m, c | \underline{x}, \underline{y}) &\propto \prod_i f(x_i, y_i | \mu_{X_i}, m, c) \cdot f_o(\underline{\mu}_X, m, c) . \\ f(m, c | \underline{x}, \underline{y}) &\propto \int f(\underline{\mu}_X, m, c | \underline{x}, \underline{y}) d\underline{\mu}_X \end{aligned}$$

Assumendo una distribuzione uniforme $f_o(\underline{\mu}_X, m, c)$, abbiamo che

1. se $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$ allora le gaussiane che descrivono la probabilità di X_i intorno a μ_{X_i} diventano delle $\delta(x_i - \mu_{X_i})$ e quindi

$$f(m, c | \underline{x}, \underline{y}) \propto \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{Y_i}} \exp \left[-\frac{(y_i - m x_i - c)^2}{2 \sigma_{Y_i}^2} \right].$$

2. Il caso generale di $\sigma_{X_i} \neq 0$ può essere trattato esattamente nello stesso modo, con la complicazione che l'integrale è un po' più complicato. Il risultato è

$$f(m, c | \underline{x}, \underline{y}) \propto \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_{Y_i}^2 + m^2 \sigma_{X_i}^2}} \exp \left[-\frac{(y_i - m x_i - c)^2}{2 (\sigma_{Y_i}^2 + m^2 \sigma_{X_i}^2)} \right],$$

che si riconduce al caso precedente quando $\sigma_{X_i} \rightarrow 0$. Essenzialmente essa dice che si sostituiscono alle σ_{Y_i} delle deviazioni standard effettive ottenute sommando in quadratura quelle delle Y e quelle delle X , opportunamente propagate mediante la derivata $\partial Y / \partial X$, che nel caso lineare è esattamente m . Ovviamente, in questo caso la soluzione diventa più complicata, ma il problema può essere affrontato per iterazione, calcolando m e c senza tener conto delle σ_{X_i} e poi inserendo nelle formule le deviazioni standard effettive calcolate con questo valore di m . La convergenza è, in genere talmente rapida, che, se i punti sono già stati graficati, nemmeno vale la pena di fare troppi conti: basta valutare a occhio m dal grafico e usare questo valore nel calcolo delle deviazioni standard effettive.

12.3 Formule dei minimi quadrati

Riportiamo direttamente i risultati che si ottengono applicando i ragionamenti descritti nel paragrafo precedente.

12.3.1 σ_Y nota e costante

Indichiamo con

$$\begin{aligned} n & : \text{ numero di punti sperimentali;} \\ \sigma & : \text{ deviazione standard delle } Y; \\ \bar{x} & : \text{ media aritmetica dei valori delle ascisse;} \\ \bar{y} & : \text{ idem per valori delle ordinate;} \\ \overline{x^2} & : \text{ idem per i quadrati;} \\ \overline{x y} & : \text{ idem per i prodotti;} \\ \text{Var}(x) & = \overline{x^2} - \bar{x}^2; \\ \text{Cov}(x, y) & = \overline{x y} - \bar{x} \bar{y}. \end{aligned}$$

Si noti come la $\text{Var}(x)$ non sia legata agli errori delle X (nulli), ma alla distribuzione dei punti sperimentali proiettata sull'asse delle ascisse. Con questo

formalismo abbiamo quindi:

$$\hat{m} \equiv E(m) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \quad (12.6)$$

$$\sigma(m) = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12.7)$$

$$\hat{c} \equiv E(c) = \bar{y} - \hat{m} \cdot \bar{x} \quad (12.8)$$

$$\sigma(c) = \sqrt{\bar{x}^2} \cdot \sigma(m) \left(= \frac{\sqrt{\text{Var}(x) + \bar{x}^2}}{\sqrt{\text{Var}(x)}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (12.9)$$

$$\rho(m, c) = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}} \left(= \frac{\text{segno}(\bar{x})}{\sqrt{1 + \frac{\text{Var}(x)}{\bar{x}^2}}} \right). \quad (12.10)$$

Si noti la dipendenza delle incertezze dalla deviazione standard che descrive la distribuzione degli errori sulle Y_i , dal numero di punti sperimentali (il solito $1/\sqrt{n}$), dal *braccio di leva* dei punti sperimentali (quantificato da $\sqrt{\text{Var}(x)}$) e, per quanto riguarda l'intercetta, dalla distanza del baricentro dei punti dall'asse Y . Il coefficiente di correlazione è pari a zero quando la coordinata x del baricentro dei punti sperimentali è pari a 0, mentre aumenta in modulo quando i punti sono molto distanti. Il suo segno è uguale a quello della coordinata X del baricentro. Si faccia inoltre attenzione a non confondere questa correlazione fra m e c con quello fra x e y , ovvero $\rho(x, y)$.

Si noti, inoltre, come l'equazione 12.8 indica che il baricentro dei punti debba appartenere alla retta ottenuta dal fit. Questo rappresenta un modo rapido per verificare che non ci siano errori di calcolo.

12.3.2 σ_{Y_i} ignote e supposte costanti

Tutte le formule precedenti valgono ancora. La sola differenza consiste nel fatto che σ va valutato dagli scarti fra le ascisse dei punti sperimentali e quelle della retta che meglio approssima i punti, ovvero quella in corrispondenza di $E(m)$ e $E(c)$. Si è già fatto cenno a questo metodo nel paragrafo 10.5.2. In analogia con la deviazione standard, si calcola la radice quadrata della media dei quadrati degli scarti fra y_i e le funzioni calcolate in x_i . Inoltre, come spiegato nel paragrafo 10.5.1, il problema diventa complicato quando il numero di punti sperimentali è piccolo. Con i dovuti caveat espressi in tale paragrafo, il modo usuale è che “va nella direzione giusta” di trattare il problema è di dividere per $n - 2$, anziché per n , la somma dei quadrati dei residui. Quindi la formula pratica è

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \hat{m} x_i - \hat{c})^2}{n - 2}}. \quad (12.11)$$

12.3.3 σ_{Y_i} diverse e note a priori

Quando le deviazioni standard che descrivono i possibili errori sulle ordinate sono note, ma diverse fra loro valgono ancora le formule (12.6)-(12.10), con le seguenti variazioni:

- tutte le medie (\bar{x} , $\overline{x^2}$, \bar{y} e \overline{xy}) sono calcolate come medie pesate con pesi p_i pari gli inversi delle varianze delle Y_i :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{\sigma_{Y_i}^2} \\ \bar{x} &= \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i} \\ \overline{x^2} &= \frac{\sum_i p_i x_i^2}{\sum_i p_i} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_i p_i y_i}{\sum_i p_i} \\ \overline{xy} &= \frac{\sum_i p_i x_i y_i}{\sum_i p_i}; \end{aligned}$$

- la combinazione σ^2/n che compare nel calcolo delle deviazioni standard dei parametri è sostituita dall'inverso della somma dei pesi:

$$\frac{\sigma^2}{n} \rightarrow \frac{1}{\sum_i p_i}.$$

12.4 Esempi di applicazione delle formule dei fit

12.4.1 Incertezze ignote e presupposte uguali

Questo è sicuramente il caso più interessante per le applicazioni di laboratorio. Infatti non sempre è possibile valutare le deviazioni standard associate agli errori casuali ripetendo molte volte le misure a parità di condizioni. Inoltre anche ripetendo le misure si potrebbe non tenere conto di possibili fluttuazioni che dipendono dal valore del misurando (vedi discussione sugli errori sistematici, paragrafo 12.7, primo punto). Come esempio numerico, consideriamo i dati dell'allungamento della molla in funzione della massa applicata (vedi tabella 2.5). Si noti l'assenza, a questo livello, di incertezze associate alle misure. Infatti ogni stima sarebbe arbitraria, come discusso lungamente nei capitoli precedenti. I valori sono stati riportati con tutte le cifre che si riuscivano ad apprezzare sugli strumenti. Si noti come gli studenti abbiano deciso, nonostante le raccomandazioni contrarie, che, date le condizioni di lavoro, fosse difficile effettuare letture al di sotto del millimetro. Vedremo nel seguito se, con il senno del poi, avrebbero dovuto sforzarsi un po' e quali sono le conseguenze sul risultato.

Riportiamo nella tabella 12.1 i dettagli dei calcoli. I simboli \sum_x , \sum_{x^2} , \sum_y , \sum_{xy} stanno per le sommatorie di interesse. Si noti come il numero di cifre della tabella non è legato alle regole sulle cifre significative, secondo le

	Serie 1	Serie 2	Serie 3	Media
$\sum x$ (kg)	4.607	4.607	4.607	4.607
$\sum x^2$ (kg ²)	2.914	2.914	2.914	2.914
$\sum y$ (mm)	605	617	619	613.67
$\sum xy$ (kg·mm)	406.6	413.4	414.6	411.6
\bar{x} (kg)	0.5758	0.5758	0.5758	0.5758
$\overline{x^2}$ (kg ²)	0.3642	0.3642	0.3642	0.3642
\bar{y} (mm)	75.63	77.13	77.38	76.71
\overline{xy} (kg·mm)	50.83	51.68	51.82	51.44
Var(x)	0.03262	0.03262	0.03262	.03262
Cov($x y$)	7.276	7.266	7.2663	7.269
m (mm/kg)	223.1	222.77	222.77	222.88
c (mm)	-52.84	-51.17	-50.91	-51.64
σ (mm)	0.659	0.319	0.569	0.290
$\sigma(m)$ (mm/kg)	1.291	0.624	1.11	0.567
$\sigma(c)$ (mm)	0.779	0.377	0.672	0.342
$\rho(m, c)$	-0.954	-0.954	-0.954	-0.954

Tabella 12.1: Dettagli del fit dei dati dell'allungamento della molla.

raccomandazioni che durante i conti è meglio portarsi dietro molte cifre (vedi ad esempio nota al paragrafo 5.14). I risultati finali si danno invece secondo le regole. Ad esempio, per la 1.a serie:

$$m = 223.1 \pm 1.3 \text{ mm/kg} \quad (12.12)$$

$$m = -52.8 \pm 0.8 \text{ mm} \quad (12.13)$$

$$\rho(m, c) = -0.954. \quad (12.14)$$

Si noti inoltre come il coefficiente di correlazione non sia un optional, ma faccia parte integrante del risultato (vedi anche 12.5 e discussione nel paragrafo 12.8, in particolare punti 8 e 10).

La quarta colonna della tabella è ottenuta utilizzando gli allungamenti medi. Si noti come l'informazione sui parametri che si ottiene mediando le tre serie di misure è approssimativamente uguale (sia come valore che come deviazione standard) a quella combinando direttamente i tre risultati. Ad esempio la media dei tre valori di m è pari a 222.82 ± 0.26 mm/kg, contro 222.88 ± 0.29 mm/kg ottenuto dagli allungamenti medi.

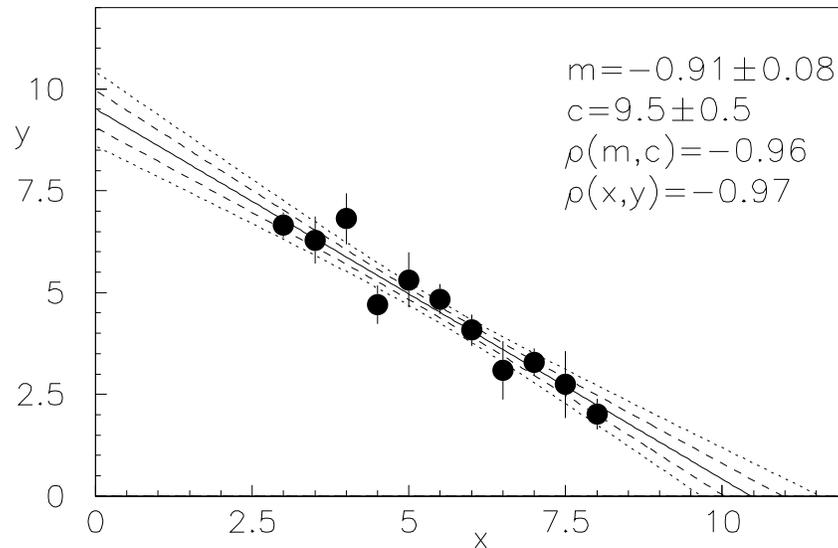


Figura 12.1: Esempi di fit nel caso di errori normali, ma con deviazioni standard diverse da punto a punto. I “dati sperimentali” sono simulati lungo una retta di parametri $m_0 = -1$ e $c_0 = 10$.

12.4.2 Incertezze note e diverse fra loro

Facciamo anche un esempio di un fit con incertezze sulle ordinate note a priori e diverse una dall'altra. Dati e risultati sono riportati in tabella 12.2. La figura 12.1 mostra i punti della tabella 12.2, con le rispettive barre di incertezza, e la retta ottenuta dal fit (linea continua).

12.5 Rette di calibrazione ed estrapolazione

Molto spesso, una volta eseguito un fit su dei punti sperimentali, si è interessati al valore vero di Y che corrisponde ad un dato valore di X . Chiaramente la sua migliore stima è data dalla retta che deriva dal fit, in quanto

$$\begin{aligned}\mu_Y &= m \mu_X + c \\ E(\mu_Y) &= E(m) \mu_X + E(c) = \hat{m} \mu_X + \hat{c}.\end{aligned}\quad (12.15)$$

L'incertezza su μ_Y è ottenuta dalla propagazione delle incertezze, tenendo conto (di fondamentale importanza!) del termine di correlazione:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\mu_Y) &= \left(\frac{\partial \mu_Y}{\partial m}\right)^2 \sigma^2(m) + \left(\frac{\partial \mu_Y}{\partial c}\right)^2 \sigma^2(c) \\ &\quad + 2 \frac{\partial \mu_Y}{\partial m} \frac{\partial \mu_Y}{\partial c} \rho(m, c) \sigma(m) \sigma(c) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(\mu_X - \bar{x})^2 \sigma^2}{\text{Var}(x) n},\end{aligned}\quad (12.16)$$

x	y	σ_y
3.00	6.66	0.32
3.50	6.29	0.58
4.00	6.81	0.63
4.50	4.70	0.47
5.00	5.31	0.67
5.50	4.84	0.37
6.00	4.08	0.38
6.50	3.09	0.72
7.00	3.29	0.34
7.50	2.74	0.83
8.00	2.01	0.38
<hr/>		
$\sum p$	55.1985	
$\sum x$	302.396	
$\sum x^2$	1812.49	
$\sum y$	249.928	
$\sum xy$	1227.21	
\bar{x}	5.47834	
$\overline{x^2}$	32.8359	
\bar{y}	4.52779	
\overline{xy}	22.2327	
$\text{Var}(x)$	2.82373	
$\text{Cov}(x, y)$	-2.57208	
m	-0.91 ± 0.08	
c	9.5 ± 0.5	
$\rho(m, c)$	-0.956	

Tabella 12.2: Dati sperimentali simulati lungo una retta avente parametri $m_0 = -1$ e $c_0 = 10$.

ove σ^2/n va sostituito nel modo indicato nel paragrafo precedente se le incertezze sono diverse. Le derivate vanno calcolate, come solito in corrispondenza di \bar{m} e \bar{c} . I conti vengono lasciati per esercizio.

Si noti l'andamento di $\sigma(\mu_Y)$ in funzione di μ_X . Essa è minima in corrispondenza dei punti sperimentali, in quanto tutte le informazioni contribuiscono a costringere (probabilisticamente) il valore di μ_Y in un piccolo intervallo intorno alla retta. A mano a mano che ci allontana dai punti misurati la qualità dell'informazione su μ_Y si deteriora, come indicato molto chiaramente dalla formula 12.16. Questo è mostrato in modo eloquente nella figura 12.1, ove le due curve tratteggiate indicano la banda di $\pm 1 \sigma(\mu_Y)$ intorno alla retta e quelle puntinate la banda di $\pm 2 \sigma(\mu_Y)$ (chiaramente le scale di μ_X e di X coincidono).

Infine, la figura 12.2 mostra infine la qualità della determinazione dei parametri e della determinazione di μ_Y da μ_X a seconda di deviazione standard, numero e tipo di configurazione dei punti sperimentali.

12.6 Analisi grafica

Vediamo quali sono i passi necessari per un'analisi grafica che, condotta a termine fino in fondo, produce risultati quantitativi in accordo con quelli ottenibili mediante fit con i minimi quadrati. In molte esperienze, comunque, non è necessario procedere ad un'analisi così accurata come quella proposta e ci si può fermare al primo passo.

12.6.1 Stima dei parametri

- Si traccia la retta stimata ad occhio, cercando di passare in mezzo a tutti i punti. Questa retta praticamente coincide con quella che si ottiene con i minimi quadrati.
- Si ricavano quindi dal grafico due punti che giacciono sulla retta, che siano ben distanziati e ben leggibili. Da questi si ricavano m e c (l'intercetta si ottiene in genere più agevolmente in modo diretto, come è ben noto).

Per quanto riguarda le cifre con cui rileggere i valori si noti come i punti della retta sono "più stabili" di quelli delle singole misure e quindi possono essere rilette anche con una cifra in più. Si ottengono quindi c e m con il numero di cifre che seguono dalle solite regolette sulle cifre significative.

12.6.2 Stima dell'incertezza sui parametri ripetendo le misure

Il modo più semplice, e che per le prime esperienze è indubbiamente istruttivo, è quello di ripetere più volte la misura e studiare le fluttuazioni dei risultati. Si tenga conto che, non facendo calcoli di "errori massimi" né propagazioni varie, è molto facile ripetere più volte le misure in alcune ore.