

# Fisica per Scienze Naturali (AA 2015-2016)

— argomenti trattati nelle lezioni —

Giulio D'Agostini

26 maggio 2016

## 1 (2 marzo)

- Introduzione al corso.
- Test di autovalutazione, con discussione di alcuni dei quesiti.  
In particolare: soluzione “fisica” (con bilancia a due piatti) del “problema del mattone”.

## 2 (3 marzo)

- Ancora sul test di autovalutazione, in particolare “leggi di scala” e formule di geometria.
- Alcune formule di base della geometria:
  - definizione di  $\pi$ ;
  - area del cerchio a partire dalle aree di poligoni regolari circoscritti;
  - volume della sfera sommando *infinite fette infinitesime* (“integrale definito”);
  - volume di una calotta sferica.
- Misura della densità di alcuni oggetti:
  - candela cilindrica;
  - candela *circa sferica* (manca una piccola calotta).
- Importanza del *controllo dimensionale*.
- Note sulle grandezze fisiche, caratterizzate (in genere) da **valore numerico** e **unità di misura** e sui cambiamenti di unità di misura.
- Moti planetari e *terza legge di Keplero*, già studiata nel corso di Geografia.
  - Problemi assegnati sul **quaderno individuale**.

## 3 (7 marzo)

- Superficie sferica modellizzata a gusci concentrici (“a cipolla”) dopo la modellizzazione a dischi (“a melanzana tonda da grigliare”...):

→  $dV = A(r) dr$ , da cui  $A(r) = \frac{dV}{dr}$ :

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$A(r) = \frac{d}{dr} V(r) = \frac{d}{dr} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4 \pi r^2$$

- Osservazioni sulle derivate in Fisica e in altre scienze, nelle quali la variabile indipendente (la generica ‘ $x$ ’ dei corsi di matematica) è spesso la variabile tempo. Sulla convenienza dell’uso della “notazione di Leibnitz” delle derivate, con i rapporti delle derivazioni infinitesime della due variabili, come in  $\frac{dV}{dr}$  usato precedentemente.
- Esempi di grandezze dipendenti dal tempo:  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $s(t)$  [equazioni orarie]. Differenza fra equazioni orarie e *traiettoria*, ovvero, ad esempio,  $y(x)$ . Concetti di velocità e accelerazione (in modi unidimensionali, anche curvilinei). Rappresentazioni grafiche di equazioni orarie e di traiettorie.
- Triangoli simili e cenno alla misura della distanza Terra-Sole di Aristarco di Samo: idea e difficoltà tecnica (e, comunque, importanza del risultato scientifico: Sole molto più grande della Terra).
- Dimensioni angolari di Sole e Luna (e importanza ai fini delle eclissi di sole).
- Valutazioni di distanze mediante opportuni triangoli simili.
- Massa e peso. Forze. Forza di gravità in prossimità della superficie terrestre ( $F = mg$ , diretta verso il basso). Unità di misura di massa (kg) e di forza (N), da cui  $g = 9.8 \text{ N/kg}$ .
- Prima e seconda legge di Newton, quest’ultima da memorizzare come  $a = F/m$ , in quanto l’accelerazione  $a$  è *conseguenza* della forza  $F$  applicata alla massa  $m$ .
- Forza gravitazionale e forza di Coulomb fra oggetti ‘puntiformi’: significato di  $m$  che compare nell’espressione delle forze ( $F = mg$  e  $F = Gm_1m_2/r^2$ ) rispetto a quella che compare nella seconda legge di Newton: *massa gravitazionale* e *massa inerziale*.
- Condizioni di equilibrio o di velocità costante in una dimensione: somma delle forze nulla.
- Caduta ‘libera’ (nel vuoto, o trascurando la resistenza dell’aria):

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

→ in questo caso  $g$  acquista il significato di accelerazione:  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , o meglio (nel senso che il significato risulta più chiaro)  $g = 9.8 \text{ (m/s)}/\text{s}$ .

- Principio di Archimede (attenzione: parla di *fluidi* e non semplicemente di liquidi).
- Misure di densità e problema delle *cifre significative* (“quelle che veramente contano” e che non dipendono dalle unità di misura usate).

#### 4 (9 marzo)

- Correzione problemi del quaderno individuale con ulteriori approfondimenti.
  - Discussione sulle cifre significative e “regole a spanna” per prodotti (o rapporti) e somme (o differenze). (Barzelletta del custode del museo di paleontologia e del reperto che ‘aveva’ un milione di anni, sei mesi e un giorno.)
  - Angoli misurati in radianti. Conversione da gradi a radianti, e viceversa: imparare il ragionamento, senza tentare di memorizzare i fattori di conversione!
- Volume di cono e piramide tramite integrali (“somma di infinite fette di spessore infinitesimo”).
- Misure sperimentali per determinare la densità dell’oggetto costituito da disco + cono e del blocco di polistirolo.
- Effetto della spinta di Archimede sulla determinazione della massa del postirolo: come tenerne conto? Cominciare a pensarci.

#### 5 (10 marzo)

- Effetto della spinta di Archimede sulle pesate effettuate in aria.
- Osservazioni su misure *dirette* e *indirette*.
- Valutazione della densità dell’aria dall’equazione di stato dei gas perfetti. (Dettagli sulla composizione dell’aria, senza esagerare con inutili dettagli, sono lasciati per esercizio.)
- Uso della terza legge di Keplero per corpi orbitanti intorno alla Terra.
- Satelliti geostazionari e orientazione delle antenne paraboliche in Italia. Importanza della parabola per concentrare le onde sul ricevitore e tecnica per ricevere con la stessa parabola i segnali trasmessi da due satelliti angolarmente non troppo distanti.

#### 6 (14 marzo)

- Fusi orari e mezzogiorno locale.
- Introduzione alla trigonometria dai triangoli rettangoli simili. Funzioni seno, coseno e tangente come rapporti fra lati del triangolo.
- Estensione ad angoli maggiori di 90 gradi: cerchio trigonometrico. Funzioni sinusoidali.
- Moto circolare uniforme, nelle diverse variabili e con le diverse ‘velocità’ che entrano in gioco (‘ $g$ ’ sta per ‘giri’,  $\alpha^{(o)}$  per angolo in gradi,  $\alpha^{(r)}$  per angolo in radianti, ‘ $s$ ’ per spazio percorso lungo la circonferenza)

$$\begin{aligned}g &\propto t \\ \alpha^{(o)} &\propto t \\ \alpha &\propto t \\ s &\propto t\end{aligned}$$

(si faccia riferimento alla rappresentazione grafica mostrata a lezione).

I fattori di proporzionalità si trovano pensando ai valori delle variabili per  $t = T$ :

$$\begin{aligned}g(t = T) &= 1 \\ \alpha^{(\circ)}(t = T) &= 360^\circ \\ \alpha(t = T) &= 2\pi \\ s(t = T) &= 2\pi R.\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}g &= \left(\frac{1}{T}\right) t = \nu t \\ \alpha^{(\circ)} &= \left(\frac{360^\circ}{T}\right) t = \omega^{(\circ)} t \\ \alpha &= \left(\frac{2\pi}{T}\right) t = \omega t \\ s &= \left(\frac{2\pi R}{T}\right) t = v t\end{aligned}$$

ove sono stati attribuiti dei simboli alle varie ‘velocità’.

- Equazioni orarie delle coordinate cartesiane di un punto in modo circolare uniforme (usiamo per gli angoli i radianti, unità *naturale*):

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos \alpha(t) = \cos(\omega t) \\ y(t) &= \sin \alpha(t) = \sin(\omega t).\end{aligned}$$

- Vettore posizione nel piano, come “coppia delle coordinate cartesiane del punto”.
- Densità dell’aria: cercare di **memorizzarne**<sup>1</sup> il valore, anche con sole due cifre *significative*, espresso sia in g/litro che in kg/m<sup>3</sup>.

## 7 (17 marzo)

- Soluzioni di problemi del quaderno individuale.
  - Si ricorda che i problemi del quaderno individuale vanno risolti (o almeno si deve tentare di risolverli) per la lezione successiva, in quanto essi costituiscono il legame fra le varie lezioni.
  - Non cercare “formule complicate” su internet, ma partire da disegni che illustrino la situazione fisica o geometrica e cercare di ricavarsi le formule a partire da “formule fondamentali”, come il teorema di Pitagora, i triangoli simili (e *quindi* le grandezze trigonometriche), etc.
- Esperimento di Torricelli ed esperimento equivalente effettuato con una colonna di acqua.

---

<sup>1</sup>Non tentare invece minimamente di memorizzare tutte le formule del moto circolare che si trovano su libri e in rete. Ricordare solo il ragionamento di base: ogni periodo un giro; ogni giro  $2\pi$  radianti e anche una circonferenza, ovvero  $2\pi$  raggi. Da questo ragionamento possono essere ricavate le relazioni fra le varie grandezze, anche se alcune diventeranno familiari con l’uso

- **Domanda *curiosa*.** Abbiamo detto che la pressione atmosferica può essere immaginata come dovuta alla forza peso di una colonna d'aria che preme su una superficie. Ma se sopra di noi c'è il soffitto la "colonna d'aria" termina. Come si spiega il fatto che al chiuso o all'aperto la pressione è la stessa?
- Misura di Eratostene della grandezza della Terra.
- Ancora sulla seconda legge di Newton.
- Terza legge di Newton (unidimensionale):  $F_A^{(B)} = -F_B^{(A)}$ .
- Non confondere le coppie azione-reazione secondo la terza legge di Newton con le forze opposte applicate *sullo stesso* corpo. Ad esempio, se l'oggetto  $A$  è posto su un piatto di una bilancia ( $B$ ), l'equilibrio delle forze ci dà

$$F_A^{(T)} + F_A^{(B)} = 0,$$

che non va confusa con

$$F_A^{(T)} + F_T^{(A)} = 0,$$

ove  $T$  indica la Terra. (Nella prima compaiono due forze che agiscono su  $A$ , mentre nella seconda le due forze agiscono su corpi diversi!)

- Accelerazione di corpi mutuamente interagenti: sono inversamente proporzionali alle masse! E per questo motivo è il gessetto a muoversi verso la Terra e non viceversa.
- Correzione della densità nel caso di misure in aria.
  - Se la bilancia indica  $m_I$  (' $I$ ' sta per 'indicazione'), vuol dire che, per come è costruita e calibrata, essa sta esercitando verso l'alto una forza  $m_I g$ .
  - Se l'oggetto posto sopra di esso, di massa  $m$ , è soggetto alla forza peso ( $F_p$ ) e quella della bilancia ( $F_B$ ), l'equilibrio delle due forze dà

$$\begin{aligned} F_p + F_B &= 0 \\ mg - m_I g &= 0, \end{aligned}$$

ovvero  $m = m_I$ .

- Se invece l'oggetto è soggetto anche ad altre forze (ad esempio spinta di Archimede, molla, etc.), nell'equilibrio bisogna considerare anche le altre forze. Nel nostro caso abbiamo quindi (ricordiamo che il corpo è completamente immerso nel fluido)

$$\begin{aligned} F_p + F_A + F_B &= 0 \\ mg - \rho_A V g - m_I g &= 0 \\ \rho V g - \rho_A V g - m_I g &= 0 \\ \rho V - \rho_A V - m_I &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\rho = \frac{m_I}{V} + \rho_A,$$

mentre la massa 'vera' del polistirolo sarà

$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= m_I + \rho_A V \\ &= m_I + m_A \end{aligned}$$

## 8 (21 marzo)

- Pesa più un chilo di piombo o un chilo di polistirolo? Non è uno scherzo se si chiarisce il senso della domanda:
  1. Se si pongono, alternativamente, su una bilancia un blocco di piombo e un blocco di polistirolo, ciascuno di massa 1000 g, in quale dei due casi la bilancia indicherà il valore maggiore?
  2. Se si pongono, alternativamente, su una bilancia un blocco di piombo e un blocco di polistirolo, e in entrambi i casi la bilancia indica 1000.0 g, quale dei due oggetti ha la massa maggiore?
- Pesare la Terra e determinarne la densità (seguito del problema di attrazione fra due sfere di piombo). Esperimento di Cavendish (senza dettagli – chi è interessato veda il video linkato in fondo alla pagina web del corso).
- Come misurare altri oggetti celesti, come il Sole e Giove?
- Simulazione della misura della latitudine del terrazzino dietro l’Aula Pasquini (avremmo dovuti essere esattamente all’equinozio). Determinazione dell’istante del transito del sole lungo il meridiano passante per il punto di osservazione mediante l’app Solar Info.
- Grandezze scalari e grandezze vettoriali.
- Pressione (è scalare!). Alcuni facili esperimenti per riprodurre delle sensazioni indotte da valori notevoli di pressione (vedi problemi su quaderno individuale).
- Pressione all’interno dei fluidi. Variazione con (la sola) altezza: Legge di Stevino. Risoluzione del quesito di come mai al chiuso la pressione è pari a quella all’aperto (ove si può immaginare la colonna d’aria che ci sovrasta): stessa quota stessa pressione (se il fluido è omogeneo e comunicante).
- Legge di Archimede come conseguenza della legge di Stevino:<sup>2</sup>. dato un cilindro retto di altezza  $h$  e sezione  $S$  immerso in un fluido di densità  $\rho_F$ , la forza totale vale (senso positivo verso il basso):

$$\begin{aligned} F_{tot} &= mg - P_{basso} S + P_{alto} S \\ &= mg - (P_{basso} - P_{alto}) S \\ &= mg - (\rho_F g h) S \\ &= mg - m_F g . \end{aligned}$$

Il secondo termine rappresenta la spinta di Archimede (verso l’alto, uguale in modulo alla forza peso della massa contenuta nel volume di fluido spostato).

## 9 (23 marzo)

- Spiegazione sui problemi assegnati, in particolare quello del “pallone” di copertura della piscina. Su una superficie orizzontale  $S$  di telo, la forza totale è data dalla forza peso ( $mg$ ), dalla forza dovuta alla superficie interna  $p_e + \Delta p$  e da quella dovuta alla pressione

---

<sup>2</sup>A lezione, la somma delle forze era stata erroneamente posta uguale a zero, come nella dimostrazione della legge di Stevino...

esterna ( $p_e$ ). La somma di queste due, con verso positivo verso l'alto, è pari a  $-p_e S + (p_e + \Delta p) S = p_e S$ . Quindi, se  $\Delta p = 50 \text{ mb} \approx 5000 \text{ Pa}$ ,  $F_P = 5000 \text{ N}$ , in grado di sostenere addirittura quasi 500 kg. Quindi la sovrappressione all'interno delle piscine deve essere *molto* inferiore ai 50 mb ipotizzati (puramente inventati).

- Esperimento del dito immerso nell'acqua contenuta in un recipiente posto sulla bilancia.
- Quesito della “barchetta” nella “piscina” con un blocco di piombo che poi viene tolto dalla piscina e affondato.
- Spinta di Archimede e condizione di galleggiamento di un corpo di densità  $\rho_C$  su un fluido di densità  $\rho_F$ , con  $x$  la frazione di corpo affondato:  $-\rho_C V g + \rho_F(x V) g = 0$ , da cui  $x = \rho_C/\rho_F$ .
- Misura di densità di oggetti irregolari (“Eureka!”).
- “Paradossi” idrostatici: botte che scoppia a causa di una colonna d'acqua di piccola sezione; il bambino che salvò l'Olanda.
- Regole di base dell'idrostatica (in un fluido omogeneo la pressione allo stesso livello è costante; l'incremento con la profondità è dovuto alla legge di Stevino) e vasi comunicanti.
- Tubo a U per misure di pressione [(sovrapp-)pressione all'interno di un palloncino; barometro differenziale.]
- Ancora sull'esperimento di Torricelli e la “scoperta del vuoto”.
- Principio di Pascal: in un fluido incompressibile sovrappressioni si propagano in tutto in fluido (l'effetto macroscopicamente meglio percepito è la variazioni sulle pareti).
- Analisi del moto circolare uniforme nelle componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \end{cases} \\ \vec{v}(t) &= \begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin(\omega t) \\ v_y(t) = \omega R \cos(\omega t) \end{cases} \\ \vec{a}(t) &= \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t) & [= -\omega^2 x] \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\omega t) & [= -\omega^2 y] \end{cases} \end{aligned}$$

Moduli dei vettori (in genere, dato  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ,  $a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ):

$$\begin{aligned} r(t) \equiv |\vec{r}(t)| &= R \\ v(t) \equiv |\vec{v}(t)| &= \omega R \\ a(t) \equiv |\vec{a}(t)| &= \omega^2 R \end{aligned}$$

→ in uno moto circolare uniforme modulo della velocità e modulo dell'accelerazione sono costanti!

Inoltre, essendo  $a_x(t) = -\omega^2 x$  e  $a_y(t) = -\omega^2 y$ , segue

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

→ in uno moto circolare uniforme il vettore accelerazione è, istante per istante, opposto a quello che indica la posizione del punto sul cerchio, e quindi è diretto verso il centro: **accelerazione centripeta**.

- Analisi del moto dell'oggetto lanciato verticalmente verso l'alto (da un istante dopo che esso si stacca dalla mano a un istante prima che venga arrestato):
  - forza costante:  $-mg$ ;
  - accelerazione costante  $-g$ : → variazione di velocità costante con il tempo, ovvero la velocità (presa positiva verso l'alto) decresce linearmente con il tempo.

## 10 (30 marzo)

- Ancora sul moto circolare: vettori ruotanti.
- Ancora sul significato di forza centripeta: non è un'altra forza, ma semplicemente il nome che si dà alla forza che mantiene un oggetto su una traiettoria circolare a velocità costante. [(I soli moti in assenza di forza sono quelli rettilinei uniforme (rispetto alle stelle fisse).]
- Sistemi di riferimento non inerziali. Forza centrifuga.
- Dettagli sulla valutazione della massa del Sole dai dati orbitali della Terra.
- Bilancio delle forze su due assi cartesiani.
- Forza elastica.
- Forza di attrito statico e dinamico.
- Molla con masse sospese: allungamento; posizione di equilibrio; forza di richiamo quando l'estremo della molla viene spostato dalla posizione di equilibrio.

## 11 (31 marzo)

- Commento sul passaggio della stazione orbitale di ieri sera.
- Commento sulla forza centrifuga a cui sono soggetti i corpi sulla Terra: componente di rivoluzione e componente di rotazione.
- Aristarco di Samo e misure della grandezza della Luna, della distanza Terra-Luna e della distanza Terra-Sole.<sup>3</sup>
- Regole di approssimazione ( $\epsilon \ll 1$ ) basata sull'osservazione che i termini in  $\epsilon^2$  possono essere trascurati.

$$\begin{aligned} (1 \pm \epsilon)^2 &\approx 1 \pm 2\epsilon \\ \sqrt{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \pm \epsilon/2 \\ \frac{1}{1 \pm \epsilon} &\approx 1 \mp \epsilon \\ \sin \epsilon \approx \tan \epsilon &\approx \epsilon \end{aligned}$$

(Nell'ultima  $\epsilon$  è chiaramente in radianti.)

---

<sup>3</sup>Per la distanza Terra-Sole trovò circa 19 volte la distanza Terra-Luna, e **non** 40 volte, come detto a lezione. Vedi Wiki.



- Ancora molla: forza e accelerazione intorno alla posizione di equilibrio:

$$\begin{aligned} F(x) &= -k x \\ a_x(x) &= -\frac{k}{m} x \end{aligned}$$

- Ancora sul moto delle proiezioni del moto circolare uniforme, in particolare

$$a_x(x) = -\omega^2 x$$

da cui

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t) \\ &= x_M \cos(\omega t) \end{aligned}$$

avendo designato  $R$  con  $x_M$  (massimo valore assunto da  $x$  durante il moto).

- Analogia fra le due equazioni: relazione fra forza e spostamento e fra accelerazione e spostamento

$$\begin{aligned} F(x) &= -k x \\ a_x(x) &= -\frac{k}{m} x \end{aligned}$$

da cui segue l'equazione oraria

$$x(t) = x_M \cos(\omega t)$$

con

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \end{aligned}$$

→ **Oscillatori armonici.**

- Significato di  $\omega$  in una oscillazione armonica: **pulsazione** (e non *velocità angolare*).
- Pozzo (ipotetico) per il centro della Terra: forza in funzione della distanza dal centro; dipende solo dalla massa della 'cipollina' di raggio ' $r$ ' (dimostrazione da completare).

**Nota:** per dettagli si veda la dispensa degli appunti per informatici, postata sul sito del corso.

## 12 (4 aprile)

- Ancora su pozzo per il centro della Terra e su oscillatori armonici.
- Moti rettilinei a velocità costante e ad accelerazione costante.

**Nota:** per dettagli si veda la dispensa degli appunti per informatici, postata sul sito del corso.

### 13 (6 aprile)

- Spiegazione di problemi.
- Cinematica e dinamica in due dimensioni.
- Problemi di lanci di oggetti con diverse velocità iniziali e sottoposti alla sola forza peso.
- Composizione e scomposizione delle forze.
- Piano inclinato.

### 14 (11 aprile)

- Moto in orbita (ideale) radente intorno alla Terra: velocità ottenuta da
  - moto circolare uniforme con accelerazione centripeta  $g$ :  $v^2/R_T = g$ , da cui  $v = \sqrt{g R_T}$ .
  - condizione di caduta libera nel tempo iniziale (piccolo)  $t$ , facendo uso del secondo teorema di Euclide sul triangolo rettangolo di ipotenusa  $2 R_T$ :
    - \* “altezza” pari allo spazio percorso nel tempo  $t$ , ovvero  $v t$ ;
    - \* proiezione del cateto minore sull’ipotenusa: spazio di caduta libera in  $t$ , ovvero  $gt^2/2$ ;
    - \* proiezione del cateto maggiore sull’ipotenusa:  $2R_T - gt^2/2 \approx 2R_T$ .Ne segue  $(vt)^2 = (gt^2/2) \cdot (2 R_T)$ , da cui  $v = \sqrt{g R_T}$ .
- Ruolo delle carricelle nei problemi di meccanica.
- Problemi con carrelli legati: importante tener conto delle forze fra un carrello e l’altro, ricordando il principio di azione-reazione.
- Moto di un pendolo ‘semplice’, ovvero di un “punto materiale” sospeso mediante un filo inestensibile e senza peso, e trascurando ogni forma di attrito.
  - Possibili variabili del problema:  $\alpha$  o  $s$ , legate fra di loro dalla relazione  $s = \alpha l$  (angolo in radianti!).
  - Equazione differenziale risultante:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g \sin \alpha.$$

- approssimazione per piccoli angoli, ovvero  $\alpha \ll 1$  (come regola pratica  $\alpha < 0.1$ , anche se minore è l’angolo migliore è la bontà dell’approssimazione)

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx \alpha \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &\approx -g \alpha, \end{aligned}$$

che nel seguito indicheremo semplicemente

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g \alpha,$$

sottintendendo l’approssimazione.

- Nell’ultima equazione si riconosce – ancora una volta! – l’equazione differenziale dell’oscillatore armonico nella variabile  $\alpha$ , da cui

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_M \cos(\omega t) \\ \alpha'(t) &= \dots \\ \alpha''(t) &= \dots ,\end{aligned}$$

con  $\alpha'(t)$  *velocità angolare* (da **non confondere con la pulsazione**  $\omega$ !) e  $\alpha''(t)$  accelerazione angolare.

- Inoltre, essendo  $s(t) = l \alpha(t)$ , avremo analoghe espressioni per  $s(t)$ , ovvero

$$\begin{aligned}s(t) &= s_M \cos(\omega t) \\ s'(t) &= \dots \\ s''(t) &= \dots .\end{aligned}$$

(Le espressioni omesse **andranno calcolate come esercizio**.)

## 15 (13 aprile)

- Commenti sui problemi in corso.
- A proposito del problema 13.4: “pendolo del secondo” e origine del metro. (Per approfondimenti vedi <https://www.roma1.infn.it/~dagos/history/index.html>)
- Quantità di moto e sua variazione (2.a legge di Newton).
- Impulso di una forza e variazione della quantità di moto.
- Quantità di moto totale e terzo principio di Newton.
- Conservazione della quantità di moto totale in sistemi isolati.
- Integrale “ $a_x$  in “ $dx$ ” e variazione di “ $1/2 v_x^2$ ”:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} a_x dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv_x}{dt} \cdot (v_x dt) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} v_x dv_x \\ &= \frac{1}{2} v_x^2(x_2) - \frac{1}{2} v_x^2(x_1) \\ &= \Delta \left( \frac{1}{2} v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} ,\end{aligned}$$

e idem per le altre componenti, da cui, sommando:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} v_x dv_x + \int_{y_1}^{y_2} v_y dv_y + \int_{z_1}^{z_2} v_z dv_z &= \Delta \left( \frac{1}{2} v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \Delta \left( \frac{1}{2} v_y^2 \right) \Big|_{y_1}^{y_2} + \Delta \left( \frac{1}{2} v_z^2 \right) \Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= \Delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \Big|_1^2\end{aligned}$$

- Medie pesate.

- Coordinate del centro di massa (sono delle medie pesate!).
- Velocità del centro di massa e quantità di moto totale.
- Costanza della velocità del centro di massa in un sistema isolato.
- Introduzione alla termologia.
  - Concetto intuitivo di temperatura.
  - Temperatura percepita diversa da quella “vera” (termometrica) a causa di vari effetti: capacità termica, conducibilità termica, flusso di fluido.
  - Alcuni esempi degli effetti dovuti a capacità termica e conducibilità termica:
    - \* come mai gli oggetti metallici ci sembrano più freddi o più caldi di legno e plastiche (a seconda che la temperatura vera sia inferiore o superiore a quella corporea);
    - \* toccare la patata bollente o il foglio di alluminio;
    - \* come mai si riesce a stare in sauna per una decina di minuti, ma non in acqua alla stessa temperatura;
    - \* come mai non conviene portare collanine e altri oggetti metallici in sauna;
    - \* come mai in mare percepiamo correnti fredde e come mai la Corrente del Golfo riesce a raggiungere il Nord Europa;
    - \* “temperature percepite” (“chill factor”) delle previsioni metereologiche.

## 16 (14 aprile)

- Sul problema 2 della volta scorsa: il vantaggio della relazione fra  $\int_{x_1}^{x_2} v_x dx$  (in una sola dimensione) e  $\Delta \left( \frac{1}{2} v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$  è ci si può ricavare la velocità finale senza passare per il tempo di caduta.
- Moltiplicando per  $m$  la relazione di cui al punto precedente si ottiene

$$\int_{x_1}^{x_2} m a_x dx = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \Delta \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right) \Big|_{x_1}^{x_2},$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \Delta \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \Big|_1^2$$

(“lavoro della forza” pari alla “variazione di energia cinetica”, espressione di cui si capirà il senso fisico nelle prossime lezioni.)

- Calore e temperatura: dalle sensazioni fisiche a grandezze metrologiche:
  - termometri e scale termometriche;
  - passaggi di stato e “punti fissi” per le scale termometriche;
  - scala centigrada (Celsius);
  - capacità termica e calore specifico:

$$\Delta T = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{c M} :$$

- definizione della *caloria* [implica attribuire all'acqua distillata intorno a 15°C un calore specifico unitario, ovvero 1 cal/(g °C), ovvero 1 kcal/(kg °C)];
- calori latenti (in particolare di fusione e di ebollizione dell'acqua).
- Equilibrio termico e principio “zero” della termodinamica.
- Scambi di calore in sistemi isolati:  $\sum_i Q_i = 0$   
→ Temperatura di equilibrio è la media pesata delle temperature, con pesi pari alle capacità termiche.

(Dettagli su “F1inf”: [https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1\\_06-07/lezioni.pdf](https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1_06-07/lezioni.pdf))

## 17 (18 aprile)

- Lavoro e prodotto scalare.
- Esempi di lavoro:
  - forza peso
  - reazione vincolare
  - forza centripeta in moto circolare uniforme
  - forza gravitazione in orbite ellittiche (qualitativo, solo per far capire come cambia il modulo della velocità nei vari tratti dell'orbita)
  - forza di attrito dinamico.
- Forze conservative e non conservative.
- Esperimento del “mulinello di Joule”: equivalente in joule della caloria.
- Forze conservative ed energia potenziale.
- Conservazione dell'energia meccanica (solo forze conservative).
- Conservazione dell'energia totale (meccanica più termica).

(Dettagli su “F1inf”: [https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1\\_06-07/lezioni.pdf](https://www.roma1.infn.it/~dagos/F1_06-07/lezioni.pdf) .)

## 18 (20 aprile)

- Lavoro totale: somma dei lavori compiuti dalle varie forze.  
→ Soluzione del quesito 16.5.a della volta scorsa:
  - $L_{tot} = L^{(G)} + L^{(A)}$
  - $L_{tot} = \Delta E_c$
  - $L^{(A)}$  (negativo, in quanto forza sempre opposta a spostamento).
- Energia potenziale della molla.
- Energia potenziale della massa nel tunnel per il centro della Terra.
- Curve di energia potenziale.

- Forza ricavata dalla curva di energia potenziale:  $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$  (ove  $x$  è la generica variabile). Classificazione dei punti di equilibrio: stabile e instabile (e indifferente).
- Irrilevanza dello zero dell'energia potenziale: contano le differenze, e soprattutto conta la sua derivata, legata alla forza (e quindi costanti additive arbitrarie sono fisicamente irrilevanti)
- Energia potenziale del pendolo: formula esatta, valida per qualsiasi angolo.
- Introduzione agli urti elastici: conservazione (totale o parziale) dell'energia meccanica. Modello di urti con compressione successiva riespansione degli oggetti. Ragioni fisiche per cui è difficile (se non praticamente impossibile, per normali oggetti macroscopici) avere urti praticamente elastici.
- Classificazione e conservazioni nei vari urti fra **due corpi** (che costituiscono un sistema isolato):
  - Legge di conservazione generale (per un sistema isolato): la quantità di moto totale si conserva (deriva direttamente dalla terza legge di Newton).
  - Urti perfettamente elastici: si conserva anche l'energia cinetica totale (prima e dopo l'urto; mentre durante l'urto c'è una trasformazione, totale o parziale, dell'energia cinetica in energia potenziale del sistema elastico)
  - Urti perfettamente anelastici: i corpi rimangono attaccati (sia nulla quindi la velocità relativa nel centro di masse).

## 19 (21 aprile)

- Lavoro eseguito dalla forza di gravità per  $R$  maggiore del raggio del pianeta, o della stella. Variazione di energia potenziale quando un oggetto di massa  $m$  va da  $R_1$  a  $R_2$ .  
→ Caso particolare da  $R_T$  a  $\infty$ .
- Espressione dell'energia potenziale gravitazionale avendo assunto  $E_p(\infty) = 0$ :

$$E_p(R) = -\frac{GMm}{R},$$

in quanto

$$\begin{aligned} E_p(R) &= E_p(\infty) + \Delta E_p|_{\infty}^R \\ &= 0 + \Delta E_p|_{\infty}^R \\ &= 0 - L|_{\infty}^R = L|_R^{\infty} = \int_R^{\infty} \left( -\frac{GMm}{R'^2} \right) dR'. \end{aligned}$$

- Forza gravitazionale dal centro della Terra (per l'ipotetico pozzo) fino all'infinito.
- Velocità di fuga e velocità con la quale cadono piccoli oggetti celesti attratti dalla forza di gravità (nell'ipotesi che essi siano "molto lontani" e con velocità (relativa) trascurabile).
- Espressione analoga per la forza di Coulomb fra cariche elettriche in quanto entrambe le forze vanno come  $1/d^2$ :

$$E_p(R) = \frac{kQq}{R}$$

(Se le cariche sono di segno opposto si ha, come nel caso gravitazionale, che l'energia potenziale aumenta con la distanza; nel caso opposto diminuisce con la distanza).

- Problema opposto a quello della velocità di fuga, nel caso di cariche dello stesso segno: velocità alla quale bisogna 'sparare' un oggetto carico su un altro affinché riescano riesca ad avvicinarsi alla distanza  $R_o$  (con cenni sull'applicazione alla fusione nucleare: una volta che due nuclei si sono avvicinati fino a toccarsi entrano in gioco altre forze che trasformano i nuclei, producendo prodotti di reazione con grande energia cinetica).
- Energia totale di un (piccolo) corpo orbitante in orbita circolare intorno a un corpo di massa "infinitamente" più grande: formula risultante lasciata come esercizio.
- Lavoro: dal concetto intuitivo (nel sollevamento di pesi) alla definizione fisica. Caso del piano inclinato: il lavoro dipende solo dalla differenza di quote e non dal percorso.
- Come effettuare il lavoro necessario non avendo a disposizione la forza necessaria per il sollevamento:  $F \cdot l = (mg) \cdot h$ .
  - piano inclinato;
  - strade con tornanti;
  - filettatura delle viti;
  - carrucole "a moltiplica";
  - leve;
  - macchine idrauliche.
- Leggi di conservazione negli urti fra due corpi considerati come un *sistema isolato*.
  - quantità di moto: sempre;
  - energia cinetica: solo urti perfettamente elastici.
- Urti perfettamente elastici e legge di inversione della velocità relativa  $[v'_1 - v'_2 = -(v_1 - v_2)]$ , ovvero  $v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$ , con applicazioni ai casi in cui uno dei due corpi ha 'inerzia infinita' rispetto all'altro e quindi nell'urto non cambia velocità.
 

Esempi:

  - urto contro parete (o di oggetto leggero contro oggetto pesante);
  - urto di oggetto pesante contro oggetto leggero inizialmente a riposo.

## 20 (27 aprile)

- Ancora su energia potenziale e gravitazione di oggetto in orbita circolare:

$$E_T = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{R}.$$

- Energia potenziale:  $-\frac{GM_T m}{R}$  o  $mgh$ ? Sono equivalenti in prossimità della superficie terrestre (con  $h = R - R_T$ ):

$$E_p(R) - E_p(R_T) = -\frac{GM_T m}{R} + \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{GM_T m}{R_T} \left(1 - \frac{1}{R/R_T}\right) \\
&= \frac{GM_T m}{R_T} \left(1 - \frac{1}{(R_T + h)/R_T}\right) \\
&= \frac{GM_T m}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + h/R_T}\right) \\
&\approx \frac{GM_T m}{R_T} (1 - (1 - h/R_T)) = \frac{GM_T m}{R_T} \frac{h}{R_T} = mgh
\end{aligned}$$

- Velocità angolare del pendolo (da non confondere con la pulsazione!) e richiami ai vari oscillatori armonici incontrati durante il corso.
  - Ripartire da  $\alpha(t) = \alpha_M \cos(\omega t)$  e fare la derivata (e la derivata seconda per l'accelerazione angolare);
  - In modo analogo si può partire dalla *coordinata curvilinea*  $s(t) = s_M \cos(\omega t)$ , con  $s = l \alpha(t)$  per trovare la velocità *lungo* l'arco di circonferenza. (La derivata seconda dà l'accelerazione lungo l'arco di cerchio da non confondere con l'accelerazione centripeta!).
- Urti perfettamente elastici: ancora casi notevoli nei quali uno dei due oggetti ha “inerzia infinita” e soluzione generale per ottenere  $v'_1$  e  $v'_2$  in caso di urti “frontali”, ovvero unidirezionali. (Dettagli su “Flinf”)
- Ancora su energia e potenza.
  - Potenze delle centrali idroelettriche.
- Unità di misura usuali di energia e potenza (vedi tabella su “Flinf”):
  - Non confondere Btu/h con Btu, kW con kWh o kcal/h con kcal (o peggio ancora con cal!).
  - Come mai le caldaie a gas domestiche hanno potenze che superano i 20 kW, quando una stufetta elettrica di 2kW è più che sufficiente a scaldare una stanza?
  - Differenza fra potenza di riscaldamento (o raffreddamento) dei condizionatori e potenza elettrica assorbita. (Il parametro di interesse è il COP, vedi ad esempio su <http://appuntidifisica.wikidot.com/pompe-di-calore> o cercare altre info su internet.)

## 21 (2 maggio)

- Sui problemi della volta scorsa:
    - A seconda dei casi, la potenza si calcola da
      - \* lavoro compiuto nell'unità di tempo;
      - \* quantità di calore trasferita nell'unità di tempo;
      - \* energia consumata/erogata nell'unità di tempo.
- (basta ricordarsi alle relazioni che intercorrono fra lavoro, energia e quantità di calore).



- Nel calcolo della potenza che incide su un pannello solare (o comunque su una superficie qualsiasi, da cui l'effetto della dipendenza dell'energia solare dall'altezza del sole nel cielo), conta il coseno fra la normale al piano e la direzione dei raggi solari.
- Quando si fanno i conti cercare di utilizzare le dipendenze funzionali (“leggi di scala”) invece di incasinarsi con conti complicati nei quali è facile commettere errori (ad es. nel calcolo della costante solare su Giove bastava pensare che l'energia per unità di superficie – se si trasmette senza attenuazione! – va come  $1/r^2$  e quindi su Giove arriva circa  $1/25$  di quanto arriva sulla Terra, fuori dell'atmosfera.)
- Sistema di punti isolato o soggetto a forze esterne:
  - se isolato si conserva la quantità di moto totale del sistema;
  - se soggetto a forze esterne, la variazione nel tempo della quantità di moto totale è pari alla somma delle forze esterne.  
Ne segue che l'accelerazione del centro di massa è proporzionale alla somma delle forze esterne (forza totale) e inversamente totale alla somma delle masse (massa totale, ovvero inerzia totale).
- Esperimento (praticamente concettuale) della valutazione della potenza di un riscaldatore di acqua.
- Velocità di trasferimento del calore e velocità di termalizzazione.
- Forza di resistenza dell'aria: discussione generale e caso di forza dipendente linearmente dalla velocità ( $-\beta\vec{v}$ ).

(Vedi dettagli su “F1inf”.)

## 22 (4 maggio)

- Richiami di idrostatica.
- Analisi del tubo a U aperto agli estremi e contenente liquido non in equilibrio:
  - analisi di pressioni, forze e inerzia totale:
  - ancora un'altra **equazione differenziale** che dà luogo a oscillazioni armoniche (se si tascurano gli attriti).
- Richiamo delle equazioni differenziali incontrate la volta scorsa:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(T - T_F) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(v - v_F)\end{aligned}$$

che scriviamo in modo generico

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau}(z - z_F)$$

e, mediante la trasformazione di variabile  $\theta = z - z_F$ ,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta$$

- Crescite e decrescite di “oggetti di popolazioni” per i quali l’incremento per unità di tempo è, per piccoli intervalli di tempo, proporzionale al numero di “individui presenti”, ovvero, in termini di variazioni infinitesime

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

che possiamo riscrivere anche (ciascuna delle espressioni permette di rileggere la legge in altro modo)

$$dN = \alpha N dt$$

$$\frac{dN}{N} = \alpha dt$$

$a > 0$ : crescita, con *velocità di crescita* ad un certo istante proporzionale al numero di “individui” presenti in quell’istante;

$a < 0$ : decrescita, con *velocità di decrescita* ad un certo istante proporzionale al numero di “individui” presenti in quell’istante.

- Anche in questo caso possiamo utilizzare la grandezza **positiva**  $\tau$  avente le dimensioni di un tempo, definita in modo diverso al secondo del segno di  $\alpha$

$a > 0$ :  $\tau = 1/\alpha$ , da cui

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau} N$$

$a < 0$ :  $\tau = -1/\alpha$ , da cui

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N$$

- Confrontando con i punti precedenti, vediamo come si tratta di risolvere, per tutti i casi, **equazioni differenziali** del tipo

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{\tau} z \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{\tau} z \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 e^{t/\tau} = z_0 e^{\alpha t} \\ z(t) &= z_0 e^{-t/\tau} = z_0 e^{\alpha t} \quad (\text{ricorda: } \alpha = -/\tau) \end{aligned}$$

- **Crescite e decrescite esponenziali**: sono caratterizzate da velocità di crescita/decrescita proporzionale al valore della popolazione e non significano vagamente “enormi”, come si sente nei media!
- Tempi di raddoppio e di dimezzamento e loro legame con la **costante di tempo**  $\tau$ .

## 23 (5 maggio)

- Ancora andamenti esponenziali, crescenti e decrescenti:  $\alpha$ ,  $\tau$  e  $t_2$  o  $t_{1/2}$ .
- Soluzione problema del Carbonio 14.
- Uso di carte logaritmiche ('semilog') per *linearizzare andamenti esponenziali*.
- Brevissima introduzione al linguaggio di programmazione R (vedi sul sito per informazioni sull'installazione e sui comandi utilizzati a lezione)
- Come ricavare  $z_0$ ,  $\tau$  e  $t_2$  (o  $t_{1/2}$ ) per via grafica.
- Come ricavare  $\alpha$  da due punti qualsiasi sulla "retta" dell'andamento lineare su carta semilog (in realtà si tratta di una esponenziale):

essendo l'andamento  $z = z_0 e^{\alpha t}$ , prendendo i logaritmi di entrambi i membri,

$$\ln z = \ln z_0 + \alpha t$$

dati due punti  $(t_1, z_1)$  e  $(t_2, z_2)$  sulla retta, essendo

$$\ln z_1 = \ln z_0 + \alpha t_1$$

$$\ln z_2 = \ln z_0 + \alpha t_2$$

$$\ln z_2 - \ln z_1 = \alpha (t_2 - t_1)$$

segue

$$\alpha = \frac{\ln z_2 - \ln z_1}{t_2 - t_1}$$

da cui si ricava  $\tau$  (si faccia attenzione al segno di  $\alpha$ , essendo  $\tau$  definito positivo).

## 24 (9 maggio)

- Ancora sulle oscillazioni del pendolo: vettori delle forze, accelerazione e velocità nel tempo (vedi animazione sul sito).
- Ancora sulle equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(T - T_F) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(v - v_F),\end{aligned}$$

che riscriviamo in funzione della generica variabile  $z$  come

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\tau}(z - z_F),$$

il cui significato è che "la velocità di  $z$  è proporzionale alla differenza fra il valore istantaneo e quello asintotico". Tramite il cambiamento di variabile  $\theta = z - z_F$  si ottiene

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta,$$

che, come sappiamo, ha soluzione

$$\theta = \theta_0 e^{-t/\tau},$$

da cui segue

$$\begin{aligned} z - z_F &= (z_0 - z_F) e^{-t/\tau} \\ z &= z_F + (z_0 - z_F) e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

- Casi particolari

- $z_0 > 0$  e  $z_F = 0$  :

$$z = z_0 e^{-t/\tau}$$

- $z_0 = 0$  e  $z_F > 0$  :

$$z = z_F (1 - e^{-t/\tau}).$$

- Applicazioni, a seconda del significato di  $z$ :

- termalizzazione a partire da temperature minori o maggiori di  $T_F$ ;
- raggiungimento di velocità asintotiche a partire da velocità minori (esempio, caduta in aria<sup>4</sup> a riposo) o maggiori (ad esempio quando si apre il paracadute, provocando un rallentamento dalla velocità limite in caduta libera alla velocità limite “in sicurezza”).

- Note sull’uso della carta logaritmica (‘semilog’): sulle ordinate vanno riportati i moduli delle differenze fra il valore istantaneo e quello asintotico.

- Richiamo delle leggi dei fluidi in condizioni statiche:

1. – cilindro di fluido (anche virtuale) disposto orizzontalmente (‘1’: sinistra; ‘2’: destra):

$$F_t = P_1 A - P_2 A = 0,$$

in quanto  $P_1 = P_2$  allo stesso livello.

- cilindro di fluido (anche virtuale) disposto verticalmente (‘1’: basso; ‘2’: alto):

$$\begin{aligned} F_t &= P_1 A - mg - P_2 A \\ &= P_1 A - (\rho h A)g - P_2 A \\ &= P_1 - \rho gh - P_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

in quanto  $P_1 = P_2 + \rho gh$  (legge di Stevino).

La somma delle forze sul “cilindro di liquido” è nulla, e quindi sono anche nulli il lavoro e la variazione di energia cinetica.

2. Idem se il cilindro è in movimento

---

<sup>4</sup>Si ricorda che la forza di tipo  $\beta \vec{v}$  è solo una semplificazione per fini didattici, essendo la dipendenza della forza quadratica con la velocità.

- Legge di Leonardo ([https://it.wikipedia.org/wiki/Legge\\_di\\_Leonardo](https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Leonardo)) per fluidi **incompressibili**:

- Portata,  $\frac{dV}{dt} = A \frac{ds}{dt} = A v$ , deve essere costante, ovvero per ogni sezione deve scorrere la stessa quantità di liquido per unità di tempo.
- ne segue che, in due posizioni qualsiasi lungo il tubo,  $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ .

Se il tubo si restringe la velocità deve aumentare (ben noto modo di aumentare la velocità di un getto d'acqua stringendo o tappando parzialmente il tubo).

- Bilancio energetico di un liquido (incomprimibile e non viscoso, ovvero trascurando forze di attrito sia all'interno del fluido che fra fluido e pareti) che scorre orizzontalmente **in modo stazionario**, in tubo di sezione variabile, mediante il ragionamento della "scomparsa" e "riapparizione".

- se la velocità degli elementi  $dV$  (o  $dm = \rho dV$ ) di liquido cambia, cambia anche l'energia cinetica totale;
- la variazione di energia cinetica deve essere pari al lavoro compiuto dalle forze di pressione del liquido esterno alla porzione compresa fra le sezioni  $A_1$  e  $A_2$  prese in considerazione;
- il lavoro totale vale (con la sezione  $A_1$  a sinistra e  $A_2$  a destra e  $v$  diretta da sinistra verso destra):

$$\begin{aligned} L^{(P)} &= F_1 ds_1 - F_2 ds_2 \\ &= P_1 A_1 ds_1 - P_2 A_2 ds_2 \\ &= P_1 dV_1 - P_2 dV_2 \\ &= P_1 dV - P_2 dV \end{aligned}$$

(in quanto, essendo il liquido incompressibile,  $dV_1 = dV_2$ , indicato quindi con  $dV$ );

- possiamo immaginare lo scorrimento in un piccolo tempo  $dt$  come lo spostamento di  $dV$  da una sezione all'altra, sezioni caratterizzate eventualmente da velocità diverse; l'effetto netto è quello di un volume  $dV$  (o massa  $dm = \rho dV$ ) che si sposta da  $A_1$  (ove aveva velocità  $v_1$ ) ad  $A_2$  (ove ha velocità  $v_2$ );
- la variazione di energia cinetica vale quindi  $\frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$ ;
- eguagliando la variazione di energia cinetica al lavoro compiuto dalle forze esterne (esterne al liquido compreso fra la sezione  $A_1$  e la sezione  $A_2$ !) si ottiene finalmente

$$\begin{aligned} P_1 dV - P_2 dV &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ P_1 \frac{dm}{\rho} - P_2 \frac{dm}{\rho} &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ P_1 - P_2 &= \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \\ P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \end{aligned}$$

ovvero, in generale, per qualsiasi sezione (di tubo disposto orizzontalmente):

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} :$$

**se la velocità aumenta la pressione diminuisce;**

– riassumendo (per tubo disposto orizzontalmente):

- \* se la sezione diminuisce, la velocità aumenta e quindi la pressione diminuisce;
- \* se la sezione aumenta, la velocità diminuisce e quindi la pressione aumenta.

- Un importante esempio: se una ostruzione diminuisce la sezione di una arteria, la velocità del sangue aumenta, la pressione diminuisce e il tratto di arteria subisce una forza esterna (a causa di maggiore pressione) che la fa comprimere ancor più!
- Caso generale, con tubo non necessariamente orizzontale, ma con tutte le altre ipotesi (liquido incompressibile e non viscoso; flusso stazionario):

- Nel bilancio energetico bisogna tener conto anche del lavoro compiuto dalla forza di gravità;
- essendo la forza di gravità conservativa, il lavoro può essere valutato dall'opposto della variazione dell'energia potenziale;
- anche in questo caso tale variazione può essere valutata mediante l'espedito di “scomparsa” e “riapparizione” usato per l'energia cinetica:

$$L^{(G)} = -dm(h_2 - h_1);$$

– il bilancio energetico diventa quindi

$$P_1 \frac{dm}{\rho} - P_2 \frac{dm}{\rho} + \rho dV(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2$$
$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

ovvero, in una sezione qualsiasi,

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

nota come **equazione di Bernoulli**.

- Esempi notevoli:

– nel caso statico ( $v = 0$ ) essa contiene la legge di Stevino:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$
$$P_2 - P_1 = \rho g (h_1 - h_2)$$

– nel caso di un foro (di sezione  $A_2$  piccola) in un recipiente di sezione ( $A_1$ ) grande tenuto aperto:

- \* le pressioni in corrispondenza di  $A_1$  e  $A_2$  sono uguali e pari a quella atmosferica ( $P_A$ );
- \* essendo  $A_1 \gg A_2$  la velocità di discesa del fluido nel recipiente può essere trascurata ( $v_1 \approx 0$ );
- \* ne segue, prendendo  $h$  dal livello del foro

$$P_A + \rho g h_1 + 0 = P_A + 0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2 g h_1}$$

⇒ lo zampillo esce la stessa velocità che avrebbe una goccia caduta da una altezza di  $h_1$  (“teorema di Torricelli”).

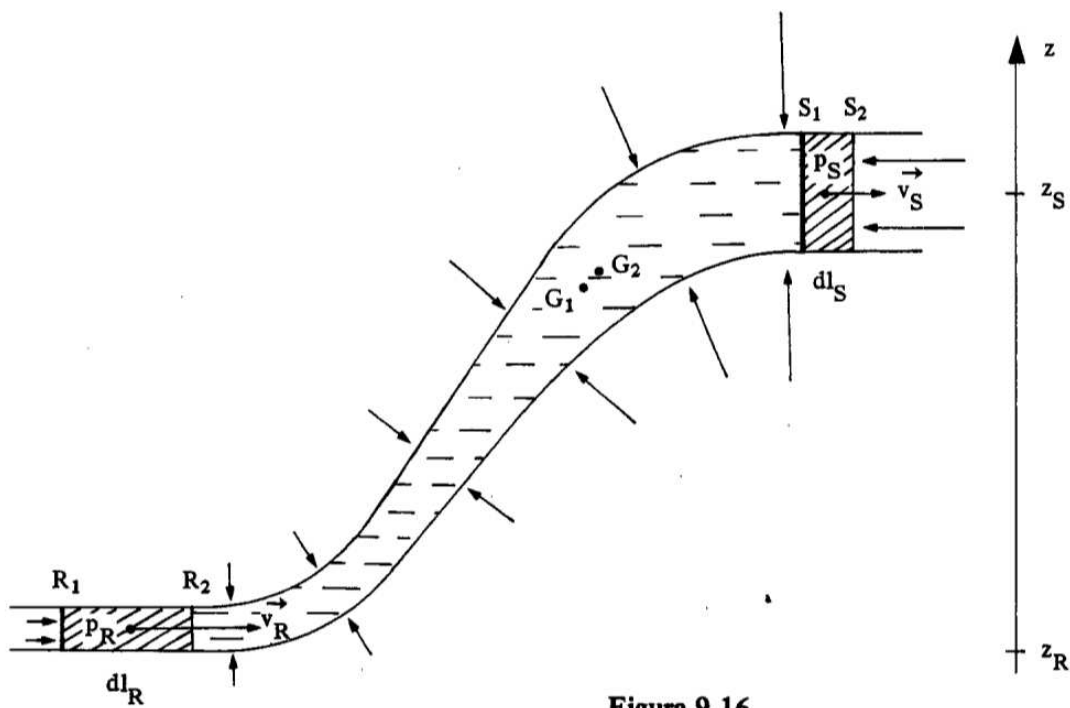


Figura 9.16

Figura 1: Figura illustrativa del ragionamento per arrivare all'equazione di Bernoulli dal bilancio energetico (da Franco Dupré, *Lezioni di Fisica, Vol. 2*, con notazione un po' diversa da quella usata a lezione: le sezioni  $A_1$  e  $A_2$  sono indicate con  $R$  e  $S$ ; velocità, pressioni e quote in corrispondenza sono indicate con  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_S$ ,  $p_S$  e  $p_R$ ,  $z_S$  e  $z_R$ ; gli spostamenti sono indicati con  $dl_R$  e  $dl_S$ ;  $G_1$  e  $G_2$  indicano il baricentro nei due istanti considerati, anche se non vengono usati in quanto si segue l'espedito di "scomparsa" e "riapparizione"; le frecce ortogonali al tubo indicano infine le reazioni vincolari del tubo, ortogonali al moto e che quindi non compiono lavoro).

## 25 (11 maggio)

- Conseguenze (alcune già viste) dell'equazione di Bernoulli:
  - legge di Stevino;
  - teorema di Torricelli (zampillo da parete di grande recipiente);
  - effetto Venturi, ad es.
    - \* misuratore di velocità di aerei (benché approssimata);
    - \* funzionamento dei vaporizzatori.
- Ancora su andamenti esponenziali:
  - problemi in corso
- Crescita limitata (modello Verhulst): vedi vedi dettagli, link e plot (con comandi R!) sul sito del corso.
- Introduzione alla fotometria:
  - la quantità di luce non va confusa con l'energia necessaria a produrla;
  - la quantità di luce emessa per unità di tempo ('flusso luminoso') viene misurata in lumen (lm);
  - il parametro che fornisce l'efficienza delle sorgenti luminose è espresso in lm/W.
  - l'*illuminamento* è invece misurato in lux (lx), ove 1 lux è pari a 1 lumen su metro quadrato.
  - per avere un'*idea* dell'illuminamento si possono usare i sensori sugli smart (si cerchi ad esempio *luxmetro* sugli app store).

## 26 (12 maggio)

- Angolo solido in *steradiani* (sr), in analogia ad angolo in radianti: *rapporto fra porzione di area di un cerchio e il quadrato del suo raggio*.
  - è adimensionale (come il radiante);
  - l'angolo solido sotteso dall'intera superficie del cerchio è pari a  $4\pi$  sr, in quanto  $(4\pi R^2)/R^2$ ;
  - un cono di **semiapertura**  $\theta$  definisce un angolo solido di

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

(Si verifica subito che un emisfero ha angolo solido  $2\pi$  sr e l'intera sfera  $4\pi$  sr)

- Quantità fotometriche:
  - il *flusso luminoso*, o 'potenza luminosa', misurato in lumen (lm), indica quanta luce viene emessa, attraversa una certa superficie, o viene assorbita, per unità di tempo;



- L'*intensità luminosa*, misurata in candele (cd) indica invece il flusso luminoso per unità di angolo solido ('per' nel senso di "flusso luminoso diviso l'angolo solido": lo stesso flusso luminoso ('stessi lumen') emessi in un cono più piccolo ('angolo solido minore') caratterizzano una sorgente di maggiore intensità. Esso può dipendere dalla direzione di emissione, come si può facilmente immaginare pensando che lampade e lampadari risultano più o meno luminose a seconda da che direzione le si guardano (e in alcune direzioni l'intensità può essere addirittura nulla, come per fari, faretti e torcie).

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ sr}$$

- L'*illuminamento*, misurato in lux (lx), indica infine il flusso di luce per unità di superficie dell'oggetto illuminato.

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} / 1 \text{ m}^2$$

- Introduzione all'ottica geometrica.
- Misure storiche della velocità della luce da osservazioni astronomiche:
  - variazione del periodo di rivoluzione di Io intorno a Giove in funzione della velocità relativa Terra-Giove (Rømer, 1676);
  - aberrazione della luce (Bradley, 1725).
- Definizione del parsec.

## 27 (16 maggio)

- Altra grandezza fotometrica: "lumen second" (nel senso di lumen×second, ovvero lm·s), vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Lumen\\_second](https://en.wikipedia.org/wiki/Lumen_second) (nella wiki italiana la voce non esiste). Rappresenta veramente la "quantità" di luce, in contrapposizione ai lumen, che invece indicano il flusso, anche se la grandezza viene denominata *impropriamente* alquanto 'Luminous energy'. Il lm·s è anche denominato Talbot.
- Cenni sulle 'impostazioni' per effettuare foto (ci ritorneremo)
  - **Tempo**, indicato ad esempio con 60, 125, 500 o 1000, numeri che in realtà rappresentano i reciproci del *tempo di esposizione*, negli esempi di sopra 1/60 s, 1/125 s, 1/250 s, e 1/1000 s. Più grande è il 'numero', minore è il tempo e quindi meno luce entra (nel senso di meno 'lumen×secondo', o Talbot).<sup>5</sup>
  - **Diaframma**, indicato con numeri del tipo 2.8, 4, 8 o 11, e legato all'"apertura" dell'obiettivo, anche se i numeri *piccoli* indicano *grandi aperture* (ovvero grandi aree di ingresso) e quelli grandi piccole aperture. Si dice quindi che un obiettivo il cui "minimo numero" di diaframma vale 1.4 è molto più luminoso di uno il cui minimo numero vale 2.8.

---

<sup>5</sup>Ad esempio se l'*illuminamento* è 1000 lx e l'area di ingresso della luce dell'obiettivo è di 1 cm<sup>2</sup>, il *flusso luminoso* sarà pari a 0.1 lm. Se la foto viene scattata con un tempo di 1/60 s nell'obiettivo entreranno  $\approx 1.7 \times 10^{-3}$  lm·s (o Talbot) di luce (ma non tutti finiranno sul sensore, in quanto il sensore è in genere rettangolare, mentre l'apertura è circolare).

- **ISO**, indica la sensibilità del sensore. Numeri tipici sono 100, 200, 400, o anche 3200. Più grande è questo numero e di meno luce ha bisogno il sensore per essere ‘impressionato’ con la ‘giusta intensità’. Quindi a parità di ‘apertura’ (diaframma) se si lavora a ISO 400 si può settare un tempo pari a 1/4 di quello che era necessario con ISO 100.<sup>6</sup>

- *Reciprocità.*

- Ricordiamo che il settaggio dei tempi come potenze di 2, con *opportuni arrotondamenti* confenzionali. Ad esempio, in secondi, 1/2, 1/4, 1/8, 1/15, 1/30, 1/60, 1/125, 1/500, 1/1000.
- I diaframmi vanno invece a passi di 1.4 (approssimazione di  $\sqrt{2}$ ): 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22.  
Si noti il raddoppio ogni due numeri di diaframma, in quanto  $(\sqrt{2})^2 = 2$ .
- È abbastanza ben noto fra chi fa le foto con un minimo di ‘consapevolezza’ che, fissando la sensibilità, ovvero gli ISO, la stessa esposizione può essere ottenuta con diverse coppie di tempo-diaframma. Ad esempio al posto di {1/125, 4} si può usare {1/250, 2.8} o {1/60, 5.6}; o anche {1/500, 2} e {1/30, 8}; e così via.
- Il motivo è che il numero diaframma (che indichiamo qui con  $n_D$ ) è *legato* al reciproco del diametro dell’apertura geometrica:

$$n_D \propto \frac{1}{d}$$

ovvero

$$d \propto \frac{1}{n_D}.$$

L’area dell’apertura sarà quindi proporzionale a  $1/n_D^2$

- Ne segue quindi quantità di luce che entra (i lm·s, o Talbot), essendo proporzionale all’illuminamento (‘lux’), all’area dell’apertura e al tempo sarà quindi data dalla seguente espressione, a meno di un fattore di proporzionalità,

$$Q_v \propto \frac{L_v \cdot T}{n_D^2}$$

avendo indicato con  $Q_v$  la “quantità di luce”<sup>7</sup> (lm·s, o Talbot) con  $T$  il tempo (s) e con  $L_v$  l’illuminamento (lx).

- Siccome, infine, a parità di sensibilità (ISO) deve essere uguale  $Q_v$ , per un certo illuminamento  $L_v$  deve essere costante il rapporto  $T/n_D^2$ :

$$\frac{T}{n_D^2} = \text{cost} :$$

---

<sup>6</sup>Se per fare una certa foto, con certe condizioni di luce con ISO 100 si usava diaframma 4 e tempo 1/125 s, con ISO 400 si può usare 1/1000 e la foto verrà esposta altrettanto bene esposta. Dove sta il trucco? Nel fatto grandi ISO non danno la stessa qualità di immagine.

<sup>7</sup>Sebbene su [https://en.wikipedia.org/wiki/Lumen\\_second](https://en.wikipedia.org/wiki/Lumen_second)  $Q_v$  venga chiamata in inglese “Luminous energy” ho obiezione di coscienza ad associare il termine “energia” a tale grandezza. Molto più ragionevole è invece il nome tedesco (‘Lichtmenge’ – quantità di luce) che compare su <https://de.wikipedia.org/wiki/Lumensekunde> ove fra l’altro le varie grandezze sono più esattamente definite, ad es.  $Q_V = \int_0^T \Phi_v(t) dt$ .

- \* se  $n_D$  raddoppia (ad esempio da 2 a 4, o da 8 a 16, etc.)  $T$  deve quadruplicare (ad esempio da 1/60 a 1/15, o da 1/1000 a 1/250, etc.);
- \* se  $T$  raddoppia (ad esempio da 1/500 a 1/250, o da 1/16 a 1/8, etc.), allora  $n_D$  deve aumentare di  $\sqrt{2} \approx 1.4$  (ad esempio da 2 a 2.8, o da 5.6 a 8, etc.)

Il fatto che variazioni di tempo possano essere compensate da variazioni diaframma è indicato come “rapporto di reciprocità”

- Significato del “numero di diaframma”.
  - Terminiamo precisando cosa si intende, più esattamente per valore diaframma e del motivo per cui si incontra l’indicazione  $f/4$  o  $f/1.4$ , etc. per indicare l’apertura, che possiamo riscrivere in generale come  $f/n_D$ :
  - $f$  sta per la “lunghezza focale” dell’obiettivo, concetto su quale ritorneremo nel seguito;
  - $f/n_D$  rappresenta proprio il diametro ( $d$ ) dell’apertura circolare dell’obiettivo, ovvero

$$d = \frac{f}{n_D},$$

ovvero

$$n_D = \frac{f}{d}.$$

Questo chiarisce finalmente quanto visto finora in modo empirico.

- Rimane un ultimo ‘mistero’: come mai la ‘giusta’ quantità di luce dipenda da  $n_D$ , rapporto fra lunghezza focale diviso il diametro, e non dal solo diametro, come verrebbe da pensare. Per questo bisogna imparare qualcosa sulle lenti, ma diciamo subito che il motivo risiede nella diversa concentrazione di luce verso il sensore determinata dalla diversa lunghezza focale (minore è  $f$  e maggiormente la luce viene concentrata verso il sensore).
- Ancora sugli esperimenti storici della velocità della luce: *ruota dentata* (Fizeau) e *specchio rotante* (Faucault).  
Vedi appunti di ottica GdA (\*).
- Legge della riflessione. (\*)
- Legge della rifrazione. (\*) Legge di Snell. Indice di rifrazione relativo ( $n_{21}$ ) e assoluto (rispetto al vuoto).  
Esempi:
  - angolo limite;
  - figura ottica;
  - effetto di sollevamento del fondo di recipienti contenenti acqua (o, equivalentemente, accorciamento delle gambe al mare).

(\*) Per l’ottica sono disponibili sul sito due file:

- `scan_ottica_dupre_ch2.pdf`, contenente il secondo del libro *Lezioni di Fisica* di Franco Dupré.

- appuntiFSN\_ottica.pdf, del docente, di cui alcune pagine sono state mostrate nella lezione odierna.

Questi file non sono linkati pubblicamente. Per scaricarli aggiungere il nome del file al link principale:

[https://.../~dagos/FSN/scan\\_ottica\\_dupre\\_ch2.pdf](https://.../~dagos/FSN/scan_ottica_dupre_ch2.pdf)

[https://.../~dagos/FSN/appuntiFSN\\_ottica.pdf](https://.../~dagos/FSN/appuntiFSN_ottica.pdf)

## 28 (18 maggio)

- Ancora sul “sollevamento del fondo” di un recipiente contenente acqua.
- Miraggi (inferiore e superiore).
- Deviazione della luce proveniente da oggetti fuori dall’atmosfera: Allungamento del giorno dovuto alla rifrazione.
- Percorso di un raggio luminoso quando attraversa una lastra di vetro.
- Diottro, e in particolare *diottro sferico*. Equazione fra  $p$  e  $q$  nel caso di piccola vergenza (raggi parassiali) e grande raggio di curvatura.
  - Limite per  $p \rightarrow \infty$ :  $f_2$ , *distanza focale* nel mezzo ‘2’  $\rightarrow$  punto in cui convergono i raggi paralleli provenienti dal mezzo ‘1’.
  - limite per  $q \rightarrow \infty$ :  $f_1$ , *distanza focale* nel mezzo ‘1’:  $\Rightarrow$  punto in cui convergono i raggi paralleli provenienti dal mezzo ‘2’.
- Caso limite di  $r \rightarrow \infty$  passando da acqua ad aria:  $q = -p/n$ :
  - il segno meno indica che il fuoco è nello stesso mezzo della sorgente:
  - $\Rightarrow$  immagine virtuale;
  - stesso risultato ottenuto nel problema del “sollevamento del fondo”, stando evidentemente  $p$  per  $d$  e  $q$  per  $d'$ .
- Presentazione flash di Algodoo (vedi sito del corso).

Dettagli sulle **dispense da scaricare dal sito** (vedi in fondo a lezione precedente).

## 29 (19 maggio)

- Dal diottro sferico al diottro cilindrico, con esperimento in aula (vasetto di vetro con acqua).  
Note sui segni, assumendo la sorgente nel mezzo a sinistra della superficie di separazione:
  - $p$  positivo verso sinistra (nel mezzo ‘1’);
  - $q$  positivo verso destra (nel mezzo ‘2’);
  - $r$  è positivo se il centro della sfera (o della sezione retta del cilindro) sta a destra (nel mezzo ‘2’).

Nota: se  $q$  è negativo vuol dire che l’immagine si forma a sinistra (ed è quindi virtuale!).

- Algodoo (facoltativo, ma può aiutare a capire la fenomenologia).

- Dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda della luce: scomposizione della luce nei vari colori; arcobaleno.
- Ancora su diaframma e macchine fotografiche.
- Valore di esposizione e sua relazione con illuminamento ([https://en.wikipedia.org/wiki/Exposure\\_value](https://en.wikipedia.org/wiki/Exposure_value))
- Immagini virtuali e reali di lenti e specchi (con dimostrazioni qualitative). Diottria:  $1/f$  conf espressa in metri (negativa se lente divergente).
- Specchi piani e specchi sferici (concavi) in “approssimazione di Gauss” (grande raggio di curvatura e raggi parassiali).
- Raggi notevoli al fine della costruzione delle immagini:
  1. raggio parallelo all'asse ottico (ovvero da  $p \rightarrow \infty$ ): il raggio riflesso passa per il fuoco;
  2. raggio pasante per il fuoco: il raggio riflesso è parallelo all'asse ottico (conseguenza della reversibilità dei raggi ottici);
  3. raggio che passa per il centro: viene riflesso su sé stesso.

(Ne sono sufficienti due: si raccomandano i primi due).
- Costruzione di immagini nel caso di immagini virtuali: se in raggi riflessi con si intersecano, allora bisogna analizzare il loro proseguimento oltre lo specchio.

### 30 (23 maggio)

- Rifrattometri per misurare densità di liquidi, concentrazioni, etc. (qualitativo).
- Principio di Fermat e velocità della luce nei mezzi trasparenti. Dal principio di Fermat alle leggi empiriche alla base dell'ottica geometrica:
  - propagazione rettilinea in mezzi omogenei;
  - legge della riflessione;
  - legge della rifrazione, con reinterpretazione dell'indice di rifrazione (relativo o assoluto):

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$n = \frac{c}{v},$$

con  $c$  velocità della luce nel vuoto e  $v$  quella nel mezzo.

- Applicazione alle immagini:
  - tutti i raggi luminosi che vanno dalla sorgente  $S$  all'immagine  $I$  impiegano lo stesso tempo;
  - caso particolare è quello di raggi provenienti da “ $p \rightarrow \infty$ ” e quindi paralleli all'asse ottico. Uno specchio ‘parabolico’ è in grado di concentrarli tutti nel fuoco:
    - \* “la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta (direttrice) e da un punto (fuoco);

- \* i raggi paralleli all'asse ottico impiegano tutti lo stesso tempo per andare dalla sorgente alla direttrice (ortogonale all'asse ottico);
- \* quindi, se riflessi da una parabola nel piano che contiene asse ottico e direttrice, impiegheranno lo stesso tempo anche per raggiungere il fuoco.

Antenne 'paraboliche' (in realtà sono paraboloidi).

- Diottri convessi e concavi:
  - se il centro di curvatura della sfera è nel mezzo a indice di rifrazione maggiore:
    - convesso;
    - convergente;
    - due fuochi reali ( $F_1$  nel mezzo 1 e  $F_2$  nel mezzo 2).
  - se il centro di curvatura della sfera è nel mezzo a indice di rifrazione minore:
    - concavo;
    - divergente;
    - due fuochi immaginari ( $F_1$  nel mezzo 2 e  $F_2$  nel mezzo 1).
- Costruzione di immagini nei diottri mediante i tre raggi notevoli: parallelo, passante per fuoco, passante per il raggio.
  - Applicazione all'esperimento del cucchiaino nel vasetto contenente acqua.
- Costruzione di immagini in **specchi** convessi mediante vari raggi notevoli:
  - quello parallelo all'asse ottico, riflesso in modo che il suo prolungamento passi per il fuoco (virtuale!);
  - quello che *va verso* il fuoco (virtuale) e che viene riflesso parallelo all'asse;
  - quello che incide sullo specchio in corrispondenza dell'asse ottico e che viene riflesso con angolo uguale a quello di incidenza;
  - quello che *va verso* il centro della sfera e che viene riflesso all'indietro.

(Si raccomanda di imparare ad usare bene i primi due casi, in quanto sono i più generali, applicandosi a specchi, diottri e lenti.)

- Specchio concavo: dalla costruzione dell'immagine alla derivazione dell'equazione dei punti coniugati  
(Con riferimento alla figura alla lavagna, con  $p$  circa  $3f$ , e indicando con  $h$  l'altezza dell'oggetto e  $h'$  quella dell'immagine). Mediante opportuni triangoli simili:

$$\frac{h}{p-f} = \frac{h'}{f}$$

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{q-f}$$

Moltiplicando il primo membro della prima equazione per il secondo membro della seconda, e il secondo della prima per il primo della seconda (stiamo moltiplicando cose uguali!)

$$\frac{h h'}{(p-f) \cdot (q-f)} = \frac{h h'}{f^2}$$

da cui

$$(p - f) \cdot (q - f) = f^2 :$$

il prodotto delle distanze dal fuoco di sorgente e immagine è pari al quadrato della distanza focale.

L'equazione precedente diventa

$$\begin{aligned} pq - pf - qf + f^2 &= f^2 \\ pq - pf - qf &= 0 \\ \frac{1}{f} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p} &= 0 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

(Equazione dei punti coniugati)

- Specchio concavo: ingrandimento.

Da una delle equazioni trovate precedentemente otteniamo banalmente il rapporto fra  $h$  e  $h'$ :

$$\begin{aligned} \frac{h}{h'} &= \frac{p - f}{f} \\ &= \frac{p}{f} - 1. \end{aligned}$$

Facendo uso dell'equazione dei punti coniugati, moltiplicando tutti i termini per  $p$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \\ \frac{p}{p} + \frac{p}{q} &= \frac{p}{f} \\ \frac{p}{q} &= \frac{p}{f} - 1, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{h}{h'} &= \frac{p}{q} \\ \frac{h'}{h} &= \frac{q}{p} \end{aligned}$$

Nella costruzione usata in questa dimostrazioni  $q$  è positivo e l'immagine capovolta. Si definisce allora l'ingrandimento lineare

$$M = -\frac{q}{p}$$

di validità generale e tale che se  $M$  è positivo l'immagine è dritta, se negativo l'immagine è rovesciata. ( $M$  sta per magnification; nei libri si trova anche il simbolo  $G$ ).

### 31 (25 maggio)

- Discussione dei vari casi del problema nr. 1 della volta scorsa.
- Confronto di specchi concavi e convessi, ricordando che per entrambi valgono

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \\ q &= \frac{p \cdot f}{p - f} \\ M = -\frac{q}{p} &= -\frac{f}{p - f}\end{aligned}$$

**Convesso** :  $f < 0$ . Per mettere in evidenza i segni possiamo riscrivere le equazioni come

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \\ q &= -\frac{p \cdot |f|}{p + |f|} < 0 \\ M &= +\frac{|f|}{p + |f|} \Rightarrow 0 < M < 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  immagine sempre virtuale, dritta e rimpicciolita.

**Concavo** – Se  $p > f$   $q > 0$ : immagine reale, invertita, rimpicciolita o ingrandita a seconda che  $p$  sia maggiore o minore di  $2f$ .

(L'espressione  $q$  si può riscrivere come  $p/(p/f - 1)$ , da cui  $M = 1/(1 - p/f)$ )

- Se  $p < f$ , l'immagine è invece virtuale, dritta, con ingrandimento che tende a 1 quando  $p \rightarrow 0$  (come se fosse uno specchio piano.)

Per completezza, **specchio piano** come limite per  $R \rightarrow \infty$ , ovvero  $f \rightarrow \infty$ :  $q = -p$ ,  $M = 1$ : immagine virtuale, dritta delle stesse dimensioni dell'oggetto.

- Dimostrazione dell'equazione dei punti coniugati e della formula dell'ingrandimento per caso di lente convergente (problema nr. 2 della volta scorsa).
- Verifica dei sei casi del problema nr. 3 della volta scorsa, con chiarimenti di ciascuna situazione fotografica.
- Ancora su concetto di immagine, contrapposto a quanto succede nelle scatole nere o nei *pinhole*. In particolare, siccome ci sono infiniti raggi che vanno da ciascun punto-oggetto a ciascun punto-immagine, i raggi passanti in una sezione qualsiasi del diaframma contengono l'informazione completa sull'immagine (ma più è grande la sezione e più luminosa sarà l'immagine – useremo questa osservazione nel prossimo punto).
- Come mai nell'esposizione quello che conta è il rapporto fra distanza focale e il diametro del 'cerchio' di ingresso della luce, invece del diametro stesso? Spiegazione euristica:
  - il flusso luminoso, che indichiamo genericamente con  $\Phi$ , deve essere proporzionale all'area di ingresso, ovvero al quadrato del diametro del cerchio (indicato qui con  $D$ ):

$$\Phi \propto D^2$$

;



- esso deve essere anche inversamente proporzionale alla dimensione dell'immagine, in quanto se essa è grande c'è dispersione di luce sul sensore, mentre se essa è piccola c'è maggiore concentrazione. Siccome  $y'$  indica la dimensione lineare l'area va con il quadrato (si pensi a un oggetto circolare, tipo un disco):

$$\Phi \propto \frac{1}{y'^2}$$

- Ricordiamo  $y'/y = q/p = f/(p-f) \approx f/p$  (approssimazione usuale, per  $p \gg f$ ), ovvero

$$y' = \frac{y \cdot f}{p},$$

la quale ci dice che la dimensione dell'immagine è proporzionale alla dimensione dell'oggetto (ovvio), è inversamente proporzionale alla distanza (ovvio) e proporzionale alla lunghezza focale ( $\rightarrow$  i 'tele' sono caratterizzati da grandi  $f$ !).

- Ne segue, mettendo tutto insieme,

$$\begin{aligned} \Phi &\propto \frac{D^2}{y'^2} = \frac{D^2 \cdot p^2}{y^2 \cdot f^2} \\ &\propto \frac{D^2}{f^2} \\ &\propto \frac{1}{n_D^2}, \end{aligned}$$

avendo indicato con  $n_D$ , come nelle lezioni precedenti, in "numero di diaframma", ovvero quel numero tale per cui  $D = f/n_D$ .

Quindi il flusso di luce va come  $1/n_D^2$  e la quantità di luce dipenderà da  $T/n_D^2$ .

- Effetto dell'apertura sulla profondità di campo: minore è la sezione intorno all'asse ottico e minore è la divergenza angolare dei raggi che raggiungono un punto immagine. Ne segue che anche oggetti posti a distanze  $p'$  diverse da quella ottimale  $p$  danno un 'cerchietto di confusione' ancora abbastanza piccolo. Vedi figure su Cap. 5 dispensa online.
- Dipendenza dell'angolo di campo dalla focale dell'obiettivo e dalle dimensioni del sensore.
  - Ricordiamo (vedi sopra) che, per  $p \gg f$ ,  $y/p \approx y'/f$ .
  - Mediante una costruzione che utilizza il raggio che passa per il centro della lente, indicando, come al solito,  $y$  e  $y'$  a partire dall'asse ottico è indicando con  $\alpha$  l'angolo che sottende  $2h$  alla distanza  $p$ , ovvero  $2h'$  alla distanza  $f$ :

$$\tan(\alpha/2) = \frac{y}{p} \approx \frac{y'}{f}$$

$$\alpha = 2 \arctan \frac{y}{p} \approx 2 \arctan \frac{y'}{f}.$$

- Il massimo di  $\alpha$  si ottiene quando  $y'$  è pari alla metà della dimensione (orizzontale o verticale) del sensore, a seconda di quello che ci interessa, e che indichiamo con  $L$ , essendo un lato del rettangolo che definisce il sensore:

$$\alpha_M \approx 2 \arctan \frac{y'_M}{f} = 2 \arctan \frac{L/2}{f},$$

che per distanze focali molto grandi, ovvero  $f \gg L$ , possiamo approssimare ulteriormente con  $\alpha_M \approx \frac{L}{f}$ . (Si ricorda che questi angoli sono in radianti!)

- Infine, anche se la dimostrazione è stata eseguita con un oggetto sull'asse ottico, queste formule hanno una validità generale, a parte effetti di distorsioni. Chiamando  $\Delta Y$  la dimensione trasversale di un oggetto e  $\Delta Y'$  quella dell'immagine,
  - la dimensione angolare  $\alpha$  (si ricordi il diametro angolare di luna e sole!) si trova dalla relazione

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta Y/2}{p} = \frac{\Delta Y'/2}{f}.$$

- La dimensione  $\Delta Y'$  dell'immagine si può trovare a sua volta conoscendo la sua lunghezza in pixel e conoscendo le dimensioni del sensore in pixel e in millimetri.
- Esempio numerico:

- \* Un sensore (quello della 'macchinina' tascabile del docente) ha dimensioni 13.2 mm  $\times$  8.8 mm, con 5472 px  $\times$  3648 px ('px' sta per pixel).
- \* Immaginiamo che in una foto scattata con una focale di 13.3 mm (avendo tale fotocamera uno zoom, la lunghezza focale è variabile) ci sia un oggetto largo 450 px, disposto orizzontalmente.
- \* Scalando, otteniamo che l'immagine di tale oggetto è larga

$$\Delta Y' = 450 \text{ px} \times \frac{13.2 \text{ mm}}{5472 \text{ px}} = 1.30 \text{ mm}$$

(13.2 mm è la larghezza del sensore).

- \* Ne risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \arctan \frac{\Delta y'/2}{f} \\ &= 2 \arctan \frac{0.650 \text{ mm}}{13.3 \text{ mm}} \\ &= 0.0488 \text{ rad} \\ &= 2.80^\circ. \end{aligned}$$

- \* Infine, se ci accade di conoscere la larghezza vera dell'oggetto, che ipotizziamo qui essere pari a 20 cm, possiamo valutarne la distanza, ricordando che  $\Delta y/p = \Delta y'/f$  (è una delle relazioni viste precedentemente, nella quale abbiamo semplificato un fattore 2 presente in entrambi i membri)

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Delta y}{\Delta y'} \cdot f \\ &= \frac{20 \text{ cm}}{1.30 \text{ mm}} \times 13.3 \text{ mm} = 205 \text{ cm}. \end{aligned}$$

## 32 (26 maggio)

- Discussione dei problemi sull'*uso telemetrico* delle fotografie digitali.
- Visione e apertura angolare degli oggetti. *Distanza di visione più distinta* (" $d_0 \approx 25 \text{ cm}$ "), da cui  $\alpha_0 \approx h/d_0$ . (A lezione era stato usato il simbolo 'y').

- Lente di ingrandimento: immagine virtuale, ingrandita e dritta. *Ingrandimento angolare*, pari a  $d_0/f$  per 'immagine all'infinito'.
- Cenno allo schema di principio del microscopio:
  - ingrandimento lineare prodotto da una lente convergente con oggetto in prossimità del fuoco ( $p > f$ ): immagine reale, ingrandita e invertita;
  - lente di ingrandimento applicata all'immagine reale prodotta dalla prima lente;
  - ne segue, come per la lente, una immagine virtuale, con ingrandimento angolare  $d_0/f$  e dritta;
  - la combinazione delle due produce una immagine virtuale, invertita e doppiamente ingrandita (ingrandimento lineare seguito da ingrandimento angolare);
  - la prima lente è chiamata obiettivo (distanza focale  $f_1$ ) e la seconda oculare (distanza focale  $f_2$ ); l'ingrandimento totale è proporzionale a all'inverso del prodotto di  $f_1$  e  $f_2$ .