Il linguaggio R nella scuola

– Calcolo, logica, grafica, programmazione, fisica, statistica –

Seminate, seminate; qualcosa crescerà!

Giulio D'Agostini
Dipartimento di Fisica, Università "La Sapienza", Roma

25 marzo 2013

Indice

1 R come (super-)calcolatrice **5**
1.1 Operazioni elementari . . . 5
1.2 Variabili . . . 8
1.3 Funzioni . . . 9
1.4 Scrivere ed eseguire degli script . . . 12
1.5 Salvare e recuperare la sessione di lavoro . . . 14
1.6 Regole del gioco e qualche consiglio . . . 16
1.6.1 Interi e reali . . . 17
1.6.2 Notazione scientifica . . . 17
1.6.3 Uso delle parentesi tonde . . . 17
1.6.4 Nomi degli oggetti . . . 18
1.6.5 Numeri complessi . . . 18
1.6.6 Sequenze di caratteri (‘stringhe’) . . . 19
1.6.7 Operazioni logiche . . . 20
1.6.8 Sintassi delle istruzioni . . . 23
1.6.9 Help! . . . 24
1.7 Tabella riepilogativa . . . 26

2 Primo contatto con la grafica **27**
2.1 Punti, simboli e caratteri sul piano cartesiano . . . 27
2.2 ‘Liste’ di coordinate . . . 29
2.3 Una parentesi formale: vettori e matrici (e liste) . . . 31
2.3.1 Vettori (nel senso informatico) . . . 32
Plot di ‘vettori di coordinate . . . 35
2.3.2 Matrici . . . 37
Rappresentazione matriciale dei dati . . . 39
Suddivisione della finestra grafica . . . 40
2.3.3 Liste . . . 42
2.3.4 Nomi degli elementi di una lista . . . 43
2.4 La magia dei colori . . . 44
2.4.1 Codice RGB dei colori . . . 44
2.4.2 Tavolozze personalizzate (e numeri in rappresentazione esadecimale) . . . 46
2.4.3 Verifica del codice RGB sui pixel di un monitor . . . 49
2.5 Alcune funzioni per disegnare figure geometriche . . . 49
2.5.1 `Rect` . . . 49
2.5.2 `Symbols` . . . 49
2.5.3 `Polygon` . . . 51

2.6 Figure trasparenti . . . 52
2.7 Annotazioni sui plot . . . 54
2.8 Come salvare i plot su file . . . 56
2.8.1 Gestione di finestre multiple . . . 56
2.8.2 Apertura e chiusura di un device associato a un file . . . 57
2.8.3 Copia della finestra attiva su un file . . . 59
2.8.4 Salvare mediante le opzioni dell'interfaccia grafica . . . 60
2.9 Tabella riepilogativa . . . 61

3 Rette, parabole e polinomi 63
3.1 Tracciamento di linee . . . 63
3.1.1 Segmenti e spezzate . . . 63
3.1.2 Semirette . . . 64
3.2 Rette nel piano . . . 64
3.2.1 Rapporti incrementali . . . 64
3.2.2 Equazione della retta . . . 65
3.3 Visualizzazione di rette . . . 66
3.4 Rileggere i punti dalla finestra grafica . . . 68
3.5 Funzioni R e funzioni matematiche . . . 70
3.6 `For` e `If`: gli elementi basilari della programmazione . . . 72
3.6.1 `For` – come ripetere più volte le istruzioni . . . 74
Esempio: fasci di rette passanti per un punto . . . 76
3.6.2 `If` – istruzioni condizionate . . . 77
3.6.3 Sottoinsiemi di vettori che rispettano una certa condizione . . . 78
3.7 Rette ortogonali a una retta data . . . 79
3.8 Parabole . . . 80
3.8.1 Sottocaso $y = ax^2$ . . . 81
3.8.2 Sottocaso $y = ax^2 + c$ . . . 81
3.8.3 Sottocaso $y = ax^2 + bx$ . . . 81
3.9 Un'equazione alternativa della parabola . . . 83
3.10 Grafici di parabole ruotate . . . 85
3.11 Cubiche e altri polinomi . . . 86
3.12 Grafici animati . . . 91
3.13 Tabella riepilogativa . . . 95

4 Vettori, versori ruotanti e 'divagazioni' sul tema 97
4.1 Vettori (nel senso geometrico) . . . 97
4.1.1 Operazioni su e fra vettori . . . 97
Prodotto scalare . . . 98
Modulo e versore (e angolo fra vettori) . . . 98
Prodotto vettoriale . . . 99
4.1.2 Rappresentazione grafica di vettori su un piano . . . 99
4.2 Dipendenza dall'angolo delle proiezioni dei versori sugli assi . . . 101
4.2.1 Funzioni trigonometriche seno e coseno . . . 101
4.2.2 Archi, cerchi, ellissi e poligoni . . . 106
4.3 Da vettori in coordinate polari a un orologio minimalista . . . 109
4.3.1 Leggere l'ora dal computer per visualizzarla con opportuni vettori . . . 110
4.4 Movimento delle lancette e moto circolare uniforme . . . 111
4.4.1 Velocità angolare delle lancette . . . 112

4.4.2 Velocità angolare e 'velocità' 112
4.4.3 Grafici animati di punti ruotanti 113
4.4.4 `While` 116
4.5 Trigonometria – un nome che spaventa 116
4.5.1 Alcune proprietà delle funzioni seno e coseno 116
4.5.2 Funzione tangente 117
4.5.3 Funzioni trigonometriche inverse 118
4.5.4 Qualche esempio di applicazione sui triangoli 119
Quanto è largo uno schermo da 40 pollici? 120
4.6 Rappresentazione grafica dei numeri complessi 121
4.6.1 La spirale dei numeri complessi 122
4.7 Tabella riepilogativa 126

5 Studio di funzioni **127**
5.1 Pendenze di funzioni non lineari 127
5.1.1 Pendenze medie e pendenze locali 128
5.2 Espressioni analitiche delle pendenze medie di funzioni elementari 130
5.2.1 Pendenze medie dei polinomi fino al quarto grado 130
Pendenza di x 131
Pendenza media di x^2 131
Pendenza media di x^3 131
Pendenza media di una generica cubica 131
Pendenza media di x^4 e di potenze di ordine superiore 132
5.2.2 Pendenze medie di altre funzioni 132
Pendenza media di $1/x$ 134
Pendenza media di $1/x^2$ 134
Pendenza media di $\sqrt{x}$ 134
Pendenza media di $1/\sqrt{x}$ 135
5.3 Pendenze locali delle leggi di potenza 135
5.3.1 Funzione 'pendenza locale' di un polinomio 135
5.3.2 Esempi 136
5.4 Variazioni di pendenza 140
5.4.1 Retta 140
5.4.2 Parabola 141
5.4.3 Cubica 141
5.5 Pendenza e 'derivata' 142
5.5.1 Derivata prima e derivate di ordini superiori 142
5.5.2 Derivate con R 142
Derivate analitiche 143
Derivate a 'forza bruta' 145
5.6 Un esempio riassuntivo 146
5.6.1 Massimi e minimi locali 148
5.6.2 Asintoti di un funzione 148
5.7 Extra 148
5.8 Tabella riepilogativa 149

6 Equazioni e ottimizzazioni **151**
6.1 Sul significato grafico di equazioni 151
6.1.1 Intersezioni fra rette 151
6.1.2 Parabole e rette 153
6.1.3 Cubica 154
6.2 Ricerca degli zeri di una funzione 156
6.2.1 Function `uniroot` 156
6.2.2 Ricerca di molti zeri 158
6.2.3 Soluzione numerica di equazioni algebriche di ordine arbitrario 159
6.3 L'algoritmo di Newton 159
6.3.1 Linearizzazione di una funzione nell'intorno di un punto 162
6.4 Argomenti di funzione che contengono funzioni 163
6.5 Soluzione di sistemi di equazioni di primo grado 165
6.6 Calcolo dei coefficienti di un polinomio 167
6.6.1 Polinomio di grado n passante per $n+1$ punti 167
6.6.2 Caso in cui si fissano a priori m coefficienti 170
6.7 Una famosa proprietà del quadrato 172
6.8 Cammino più breve e cammino più veloce 173
6.8.1 Caso di velocità uguali 173
6.8.2 Caso di velocità diverse ('il bagnino di Fermat') 174
6.8.3 Legge di rifrazione della luce 175
6.9 Minimi di funzioni complicate (eventualmente multidimensionali) 175
6.9.1 Un problema di ottimizzazione 175
6.9.2 *Gradient descent* unidimensionale 175
6.9.3 Estensione al caso multidimensionale 178
6.9.4 Funzioni di minimizzazioni di R 185
`nlm()` 186
`nlminb()` 187
`optimize()` 187
`optim()` 187
6.10 rimasugli 188
6.11 Minimizzazioni vincolate 188
6.12 Tabella riepilogativa 189

7 Programmazione e linguaggio R – Parte prima **191**
7.1 Programmazione quotidiana e programmazione formale 191
7.2 Istruzioni condizionate 192
7.2.1 `if`, '`else if`', `else` 193
7.2.2 Assegnazione condizionata: `ifelse` 195
7.2.3 `switch` 195
7.2.4 Altre condizioni 196
7.3 Soluzione di equazioni di secondo grado 196
7.4 Formattazione dei messaggi: `sprintf()` 200
7.5 Istruzioni ripetute 202
7.5.1 `for` 202
7.5.2 Ciclo condizionato 204
7.5.3 `while` 205
7.5.4 `repeat` 206

7.6 Diagrammi di flusso . . . 206
7.7 Algoritmi: concetto e qualche esempio introduttivo . . . 206
7.7.1 Multipli di un numero . . . 207
Numero di elementi predefinito (con digressione sul tempo di esecuzione) 207
7.7.2 Massimo valore prefissato . . . 209
7.7.3 Massimo, minimo, media, somma e prodotti . . . 209
7.8 Tabella riepilogativa . . . 210

8 Programmazione e linguaggio R – Parte seconda 211
8.1 Tipo di variabili . . . 211
8.2 Chiamate a funzioni . . . 211
8.3 Operazione fra matrici . . . 211
8.4 Scrittura e lettura su/da file . . . 211
8.5 Peculiarità di R rispetto ad altri linguaggi . . . 211
8.6 Qualche trucco . . . 211
8.7 Tabella riepilogativa . . . 212

9 Problemi antichi e moderni 213
9.1 Crivello di Eratostene . . . 213
9.1.1 Compilazione delle funzione . . . 215
9.2 Metodo di Euclide per il massimo comun divisore . . . 216
9.2.1 Minimo comune multiplo . . . 217
9.2.2 Operazioni con frazioni . . . 217
9.2.3 Funzioni ricorsive . . . 218
9.3 Fattorizzazione di numeri e test di ’primalità’ . . . 219
9.4 MCM e mcm alla maniera scolastica . . . 221
9.4.1 MCM e mcm fra due numeri . . . 221
9.4.2 Confronto con il metodo di Euclide . . . 222
9.4.3 Estensione a molti numeri . . . 223
9.5 Estrazioni di radici . . . 224
9.5.1 Radice quadrata con il metodi dei Babilonesi . . . 225
9.5.2 Il metodo di Newton . . . 226
9.5.3 Estensione a potenze qualsiasi . . . 228
9.6 Stima di pi greco . . . 229
9.6.1 Stima trigonometrica del perimetro . . . 229
9.6.2 Metodo geometrico . . . 231
Poligoni regolari inscritti a una circonferenza . . . 231
Poligoni regolari circoscritti a una circonferenza . . . 232
9.6.3 Osservazioni (e *caveat*!) sul calcolo numerico . . . 235
9.7 Calcoli con precisione arbitraria mediante *bc* . . . 236
9.7.1 Bc – Basic calculator . . . 237
9.7.2 Uso della funzione `system() di R` . . . 238
9.7.3 Programmi di interfaccia fra R e bc . . . 240
9.8 Calendario perpetuo . . . 243
9.8.1 Algoritmo tabulare (Wikipedia) . . . 243
9.8.2 Algoritmo contando i giorni dal 15 ottobre 1582 . . . 246
9.8.3 Differenza di date . . . 248
9.8.4 Algoritmo partendo da un primo gennaio noto . . . 248
9.9 Algoritmi di crittografia: introduzione ed esempi storici . . . 249

9.9.1 Il cifrario di Cesare 250
9.9.2 Nota sull'operatore modulo 251
9.9.3 Estensione a tutte le lettere (e gestione di altri caratteri) 252
9.9.4 Il codice dei carbonari 252
9.10 Crittografia a chiave pubblica 254
9.10.1 Cenni di aritmetica modulare 255
9.10.2 L'algoritmo RSA ed il trattamento dei numeri grandi 256
9.10.3 Un esempio con numeri facili 258
9.10.4 Il problema dei grandi numeri 259
9.11 Non tutti i problemi sono risolubili numericamente 261
9.12 Tabella riepilogativa 262

10 Giocando s'impara **263**
10.1 Alea iacta est 263
10.2 Un mazzo di carte da poker 264
10.3 Indovina il numero 265
10.4 Dal dilettevole. . . all'utile 266
10.4.1 Strategia ottimale del gioco "indovina il numero" 266
10.4.2 Ricerca binaria 268
10.4.3 Rapidità di convergenza della ricerca binaria 270
10.5 Funzioni di ricerca di R 271
10.5.1 `binsearch()` 271
10.5.2 `approx()` 272
10.5.3 Uso di `which()` 272
10.6 Un gioco strategico: le 21 palline 272
10.7 Giochiamo a tombola 275
10.8 Versione cliccabile della tombola 278
10.9 Interfaccia grafica al gioco delle 21 palline 279
10.10 Un gioco di memoria 283
10.11 Morra cinese: un gioco strategico 285
10.12 Cenno alla teoria dei giochi 288
10.13 Tabella riepilogativa 289

11 Cinematica e dinamica di oggetti 'puntiformi' **291**
11.1 Una rapidissima panoramica 292
11.1.1 Velocità: di cosa? 292
11.1.2 Cinematica del punto materiale 292
11.1.3 Cinematica 'descrittiva' 293
11.1.4 Cinematica 'predittiva' 296
Assenza di accelerazione nelle coordinate cartesiane: $a_x = a_y = 0$ 297
Assenza di accelerazione nelle coordinate polari: $a_\rho = a_\theta = 0$ 297
Accelerazioni costante delle varie coordinate 298
Casi più complicati 299
11.1.5 Equazioni orarie e traiettorie 299
Coordinate cartesiane dipendenti linearmente e parabolicamente dal tempo 299
Coordinate polari dipendenti linearmente e parabolicamente dal tempo . . 301
11.1.6 Dinamica: '$\vec{F} = m\vec{a}$' e '$\vec{a} = \vec{F}/m$' 303
11.2 Gif animate con R e ImageMagick 304
11.2.1 Lancio di oggetti con v_x fissata e v_{y_0} variabile 304

11.2.2 Lancio di oggetti con v_0 fissa e angolo di lancio variabile 305
11.2.3 Moto circolare uniforme 306
11.3 Problemini unidimensionali 309
11.3.1 Incontri di treni 309
11.3.2 Controllo dimensionale dei risultati 311
11.3.3 Problemi di ‘inseguimento’ 312
11.3.4 Caso di equazioni orarie paraboliche 313
11.4 Moto dei pianeti del sistema solare in approssimazione circolare 314
11.5 Movimento dei pianeti ‘visto’ dalla Terra 315
11.5.1 Cambiamento di coordinate 315
11.5.2 Moto relativo dei pianeti rispetto alla Terra 316
11.5.3 Sistema tolemaico ed epicicli 320
11.6 Caso generale del problema inverso [$a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$] 323
11.7 Soluzione numerica del problema “$a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$” 324
11.7.1 Soluzione numerica del problema della gittata 324
11.7.2 Confronto con la soluzione analitica 327
11.7.3 Motivo delle differenze (con cenno alle interpolazioni) 329
11.8 Estensione a casi più complicati 331
11.9 Forze dipendenti dalla posizione e/o dalla velocità 334
11.9.1 Soluzione numerica 336
11.10 Tabella riepilogativa 337

12 Cinematica predittiva e aree ‘sotto’ le funzioni 339
12.1 Soluzione geometrica di $a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$ 339
12.1.1 Interpretazione geometrica di $a(t) \cdot \Delta t$ 340
12.1.2 Valutazione numerica (‘a forza bruta’) delle aree 342
12.2 Moto uniformemente accelerato rivisitato 343
12.2.1 Moto di un oggetto lanciato verso l’alto 344
12.3 Aree e primitive delle funzioni: integrali finiti e indefiniti 344
12.4 Un interessante esercizio analitico 349
12.5 Ancora sul problema di $a(t)$ ‘semicircolare’ 351
12.5.1 Un esercizio di geometria e trigonometria 353
12.5.2 Velocità in funzione del tempo 354
12.5.3 Controllo del risultato mediante derivate 355
12.5.4 Soluzione mediante integrazione numerica 356
Funzione `integrate()` 357
Applicazione alla funzione di accelerazione ‘semicircolare’: $v(t)$ 358
12.5.5 Ordini di grandezza 360
12.6 Integrali ‘sparando a caso’ e generatori di numeri ‘casuali’ 360
12.6.1 Simulazioni di Monte Carlo mediante il metodo ‘*colpito/mancato*’ 363
12.6.2 Stima di un parametro a cui è legata l’area: stima MC di π 363
12.7 Lunghezza di un tratto di curva 364
12.7.1 Lunghezze di tratti di polinomio 366
12.7.2 Lunghezze di tratti di generiche funzioni 367
12.8 Volume di un solido di rotazione 368
12.8.1 Volume di un parallelepipedo rettangolo 369
12.8.2 Volume di un prisma retto a base triangolare 369
12.8.3 Volume di un cilindro 370

12.8.4 Volume di un cono . . . 370
12.8.5 Volume di una sfera . . . 371
12.8.6 Caso generale . . . 372
12.8.7 Volume di un palloncino . . . 372
12.9 Superfice laterale di un solido di rotazione . . . 374
Superficie laterale di un cilindro . . . 375
12.9.1 Superficie laterale di un cono . . . 375
12.9.2 Superficie di una sfera . . . 375
12.9.3 Caso generale . . . 376
12.10 Tabella riepilogativa . . . 378

13 Leggi esponenziali **379**
13.1 Progressioni geometriche e leggi esponenziali . . . 379
13.1.1 Capitalizzazione composta ‘continua’ . . . 379
13.2 Crescita e decrescita di popolazioni (e di altre grandezze) . . . 383
13.2.1 Costanti di tempo e ‘vite medie’ . . . 385
13.2.2 Tempo di raddoppio e di dimezzamento . . . 387
13.3 Datazione mediante il metodo del carbonio-14 . . . 388
13.4 Un esempio pratico di crescita ‘circa esponenziale’ . . . 388
13.4.1 Valutazione empirica di α (e quindi della costante di tempo τ) . . . 390
13.4.2 Il tacchino esponenziale . . . 390
13.5 Derivata della funzione esponenziale . . . 390
13.5.1 Limite dell’esponenziale per $\alpha t \ll 1$ ovvero $t \ll \tau$ . . . 391
13.6 Esponenziali e logaritmi naturali . . . 392
13.6.1 Potenze, radici e logaritmi . . . 392
13.6.2 L’importanza dei logaritmi naturali . . . 394
13.6.3 Proprietà dei logaritmi . . . 394
13.6.4 Derivata del logaritmo . . . 398
13.6.5 Integrale di $1/x$ . . . 399
13.7 Linearizzazioni e plot in scala logaritmica . . . 399
13.7.1 Linearizzazioni . . . 399
13.7.2 Linearizzazione di una legge di potenza e plot ‘`log-log`’ . . . 402
13.7.3 Plot *semilog* con scala delle ordinate logaritmica . . . 404
13.7.4 Riepilogo sull’uso delle scale logaritmiche . . . 404
13.8 Una variante degli esponenziali negativi . . . 405
13.9 Esempi di processi fisici con grandezze che seguono la (13.99) . . . 406
13.9.1 Moto in fluido viscoso . . . 408
13.9.2 Processo di termalizzazione . . . 409
13.10 Tabella riepilogativa . . . 410

14 Probabilità **411**
14.1 Processo di Bernoulli . . . 411
14.1.1 barplot . . . 411
14.1.2 Distribuzione binomiale . . . 411
14.1.3 Quanto bisogna aspettare? Distribuzione geometrica . . . 411
14.2 Distribuzione di Poisson . . . 411
14.3 Distribuzione di Gauss . . . 411
14.4 Simulazione di numeri aleatori . . . 411

15 Statistica descrittiva **413**

16 Analisi dei dati **415**

17 Appendice A — Da R a C e ritorno **417**
17.1 Dichiarazione delle variabili 417
17.2 Sintassi delle principali istruzioni di controllo 417
17.3 Compilazione, link ed esecuzione 417
17.4 Usare funzioni scritte in C da R 417
17.5 Perché usare R se lo stesso R è scritto in larga parte in C 417

18 Appendice B — Reference card **419**
18.1 Packages 419
18.2 Getting help 419
18.3 Input and output 419
18.4 Data creation 420
18.5 Slicing and extracting data 420
18.6 Variable conversion 421
18.7 Variable information 421
18.8 Data selection and manipulation 421
18.9 Math 422
18.10 Matrices 423
18.11 Advanced data processing 423
18.12 Strings 423
18.13 Dates and Times 424
18.14 Plotting 424
18.15 Low-level plotting commands 425
18.16 Graphical parameters 426
18.17 Lattice (Trellis) graphics 427
18.18 Optimization and model fitting 427
18.19 Statistics 428
18.20 Distributions 428
18.21 Programming 428

Elenco delle figure

1.1 Interfaccia grafica di Windows 6

2.1 Figura ottenuta con tutti comandi del paragrafo 2.1 31
2.2 Vari plot di valori immagazzinati in vettori 36
2.3 Comando promemoria dei simboli dei punti 37
2.4 Valori delle varie righe di una colonna in funzione dell'indice di riga 40
2.5 Matrice di plot prodotto da `pairs()` 41
2.6 Suddivisione della finestra grafica in una matrice 3×3 42
2.7 Scale di grigi e tavolozza di colori 47
2.8 Esempi di tavolozze personalizzate ottenute interpolando fra due colori. 48
2.9 Pixel di un minitor ingranditi 50
2.10 Cerchi, rettangoli, quadrati e 'stelle' mediante le funzioni `rect` e `symbols` 52
2.11 Figure disegnate mediante la funzione `polygon()` 53
2.12 Oggetti grafici trasparenti 54
2.13 Alcune delle possibilità di annotazioni 'speciali' in R 55

3.1 Grafico ottenuto con le istruzioni dei paragrafi 3.1 e 3.2 66
3.2 Funzione n^2, definita sull'insieme dei naturali, e x^2, definita sui reali 71
3.3 Equazione $y = mx + q$, vista come funzione di m e q, per $x = 2$. 73
3.4 Rette parallele che sembrano curve o convergenti (illusioni ottiche) 75
3.5 Simboli prodotti dal parametro `pch` 76
3.6 Fasci di rette 77
3.7 Coppie di rette parallele e relazioni fra le loro pendenze 80
3.8 Parabole ottenute mediante l'equazione $y = ax^2$ 82
3.9 Parabole ottenute mediante l'equazione $y = ax^2 + c$ 83
3.10 Parabole ottenute con $a = \pm 1$ e b compreso fra -2 e 2 a passi di 0.05 84
3.11 Parabole ruotate ottenute mediante rotazione degli assi 86
3.12 Funzione $y = c_4 x^3$, con c_4 che varia fra $1/8$ e 8 87
3.13 Cubiche con c_4 pari a 0.1, 0.5, 1 e 10 89
3.14 Come figura 3.13, ma con coefficienti del termine cubico negativo 90
3.15 Parabole animate 93

4.1 Rappresentazione grafica di vettori 100
4.2 Versore ruotante e cerchio trigonometrico 103
4.3 Versori lungo ipotenusa e cateti di un trianolo rettangolo 104
4.4 Funzioni trigonometriche seno e coseno 105
4.5 Cerchi ed ellissi tracciate in modo parametrico 106
4.6 Figura ottenuta mediante `arco()`, `cerchio()` e `poligono()` 108

4.7 Figure geometriche ottenute con `poligono.c()` . . . 109
4.8 Un orologio stilizzato . . . 111
4.9 Tre punti ruotanti su diversi cerchi e con diversi periodi . . . 114
4.10 Proiezioni lungo gli assi in un moto circolare uniforme . . . 115
4.11 Funzione tangente . . . 118
4.12 Un esercizio di trigonometria . . . 119
4.13 Risoluzione di un triangolo da due lati e l'angolo fra essi compreso . . . 120
4.14 Numeri complessi sul piano cartesiano . . . 123
4.15 Rappresentazione grafica di potenze di numeri complessi . . . 125

5.1 Rappresentazione grafica di pendenze medie . . . 129
5.2 Come figura 5.2, ma con altra ascissa del punto centrale . . . 130
5.3 Rappresentazione di pendenze medie a partire dallo stesso punto . . . 132
5.4 Alcune funzione elementari delle quali ci ricaviemo le pendenze medie . . . 133
5.5 Parabola con esempi di rette tangenti. . . . 137
5.6 Rette tangenti ad un polinomi di terzo grado . . . 138
5.7 Concavità e convessità di una curva . . . 141
5.8 Funzione e sua derivata . . . 143
5.9 Studio della funzione $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + 1$ . . . 147

6.1 Punti di intersezione di rette con l'asse delle ascisse . . . 152
6.2 Rappresentazioni grafiche di equazioni di secondo grado . . . 153
6.3 Interpretazione grafica di sistemi di equazioni . . . 155
6.4 Intersezione di funzioni . . . 157
6.5 Metodo di Newton per la ricerca di uno zero di una funzione . . . 160
6.6 Polinomi passanti per punti prefissati . . . 169
6.7 Algoritmo *gradient descent* unidimensionale . . . 176
6.8 Algoritmo *gradient descent* bidimensionale all'opera . . . 182
6.9 Altre traiettorie di discesa ottenute mediante il *gradient descent* . . . 184
6.10 Modo alternativo per visualizzare un minimo bidimensionale . . . 185

9.1 Caso particolare dell'algoritmo della radice quadrata di Newton . . . 227
9.2 Possibile eccezione del metodo di Newton per la ricerca degli zeri . . . 229
9.3 Polinomi inscritti al cerchio . . . 230
9.4 Polinomi circoscritti al cerchio . . . 233
9.5 Calendario del 1582 . . . 244

10.1 Rappresentazione grafica di una distribuzione di reddito . . . 269
10.2 Relazione inversa di quella in basso di figura 10.1 . . . 273
10.3 Gioco della tombola dopo 20 estrazioni . . . 277
10.4 Versione cliccabile della tombola . . . 278
10.5 Interfaccia grafica al gioco delle 21 palline . . . 280
10.6 Ricorda la sequenza! Un gioco di memoria . . . 284
10.7 Morra cinese . . . 286

11.1 Coordinate cartesiane e polari . . . 293
11.2 Esempi di equazioni orarie, con rispettive velocità e accelerazioni . . . 294
11.3 Moto con accelerazione linearmente decrescent . . . 296
11.4 Traiettorie ottenute da semplici equazioni orarie delle coordinate polari . . . 298

11.5 Equazioni orarie lineari e paraboliche 300
11.6 Alcune traiettorie con rappresentazione ‘stroboscopica’ 301
11.7 Traiettoria di un punto avente equazioni orarie delle coordinate polari paraboliche 303
11.8 Moto circolare uniforme: equazioni orarie delle possibili coordinate 307
11.9 Equazioni orarie, velocità e accelerazioni delle componenti 308
11.10 Incontri e sorpassi di treni 310
11.11 Problemi con equazioni orarie lineari e paraboliche 313
11.12 Esempio di soluzione ‘reale’ spuria 314
11.13 Moto apparente di Venere visto dalla Terra 318
11.14 Moto apparente di Marte visto dalla Terra 319
11.15 Moto apparente di Marte visto dalla Terra 321
11.16 Esempio di epiciclo e relativa orbita 322
11.17 Esempio di un moto ‘variamente accelerato’ 323
11.18 Spazio percorso nel problema della gittata 327
11.19 Un esempio di interpolazione lineare 330
11.20 Soluzione numerica del problema di accelerazione variabile 335

12.1 Incrementi di velocità. 340
12.2 Incrementi di velocità 341
12.3 Valutazione di Δv in funzione dell’ampiezza degli intervallini 343
12.4 Velocità e spostamento in un moto uniformemente accelerato 344
12.5 $a(t)$, $v(t)$ e $y(t)$ nel problema dell’oggetto lanciato verticalmente 345
12.6 Aree delimitate fra un polinomio del terzo grado e l’asse delle ascisse 347
12.7 Moto con accelerazione crescente e decrescente nel tempo 349
12.8 Area della porzione di cerchio A in funzione di x 353
12.9 Area della porzione di cerchio A in funzione di x 354
12.10 Controllo della soluzione di $v(t)$ ottenuta dall’area fra o e t sotto $a(t)$ 356
12.11 Soluzione numerica del problema di moto con accelerazione variabile 359
12.12 Punti estratti a caso fra in un quadrato di raggio unitario 361
12.13 Istogramma di punti generati ‘a caso’ con pesi reletivi dati da una certa funzione 362
12.14 Stima con metodo di Monte Carlo di pi greco 364
12.15 Valutazione delle lunghezze di tratti di curve 365
12.16 Prisma retto a base irregolare 369
12.17 Calcolo di volume di prismi 369
12.18 Calcolo del volume di un tronco di cono 370
12.19 Calcolo del volume di una sfera 371
12.20 Generico solido di rotazione 372
12.21 Determinazione del volume di un palloncino 373

13.1 Capitalizzazione composta annuale e continua 381
13.2 Convergenza alla costante $e = 2.71828\cdots$ di $(1+\frac{1}{n})^n$ per n crescente 382
13.3 Interesse maturato in un anno in funzione dell’intervallo di capitalizzazione . . . 383
13.4 Funzione esponenziale crescente e decrescente 386
13.5 Produzione di CO_2 delle Cina come esempio di crescita esponenziale 389
13.6 Funzione logaritmo nelle tre basi più usate 395
13.7 Linearizzazione mediante cambiamento di variabile 400
13.8 Linearizzazioni di leggi di potenze mediante grafico ‘log-log’ 401
13.9 Come figura 13.8, con l’aggiunta di tre andamenti lineari 401
13.10 Come figura 13.9, ma riportando sugli assi i valori dei logaritmi 403

13.11 Variabile il cui tasso di crescita dipende dalla differenza rispetto ad un valore asintotico 407
13.12 Decrementi esponenziali al variare di τ 407

Prefazione

L'idea ispiratrice di questo testo è che la diffusione dei personal computer fra la popolazione giovanile, avvenuta soprattutto nell'ultimo decennio, potrebbe permettere una 'rivoluzione' – mi si passi il termine – analoga a quella avvenuta negli anni settanta del secolo scorso con l'arrivo sul mercato delle prime calcolatrici scientifiche. Chi scrive ha avuto infatti la 'fortuna' di vivere le diverse fasi di questo 'incredibile' progresso. Il virgolettato sui due termini ha infatti un significato ben preciso. Mi considero infatti un privilegiato ad aver assistito a queste continue evoluzione, ma mi sarei considerato più fortunato se nell'ultimo anno di liceo classico avessi usato meglio le ore di matematica anziché perderle in conti lunghissimi e inutili facendo uso di tavole di logaritmi e di funzioni trigonometriche (il programma di greco mi ha lasciato indubbiamente un ricordo migliore – vuoi mettere i grandi tragici greci contro la 'tragedia' di pedanterie di trigonometria? Dove sta scritto che un ragazzo debba conoscerle *tutte*, e per giunta a memoria?).

In effetti l'evoluzione della potenza e capacità di memoria dei computer non cessa di stupire me i miei coetanei, quando ricordiamo che durante la tesi il computer centrale del CERN di Ginevra aveva una memoria da un mega byte, mentre il 'Nord 100' con il quale l'esperimento acquisiva i dati sperimentali si limitava a 64k (sì, come un Commodore o uno Spectrum, che arrivarono sul mercato di massa qualche anno dopo). Per non pensare che agli inizi degli anni novanta, quando per acquistare un hard disk da 2GB, ingombrante e pesante, occorreva una autorizzazione speciale di una apposita commissione di calcolo dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, mentre oggigiorno pennette USB di pari capacità vengono considerate quasi obsolete.

Nella mia storia personale – e mi scuso di questi aspetti autobiografici, ma credo aiutino a far capire lo spirito con il quale è stato intrapreso questo lavoro – una volta facevo conti a mano, aiutandomi con le tabelle dei logaritmi e della funzioni trigonometriche. Poi, con l'ingresso all'università ho scoperto il regolo calcolatore, oggetto geniale che, pur facendo perdere in accuratezza aumentava rapidamente la velocità di calcolo. Quindi dal secondo anno entrai in possesso di una fantastica Texas 51A, costata ai miei un frazione non trascurabile del loro stipendio, sostituita nel seguito da più comode calcolatrici tascabili. Ma confesso che per almeno una quindicina di anni ho seguitare a girare l'Europa con il mio fedele regolo calcolatore che non si rompeva né rimaneva senza batterie. Nel frattempo dal terzo anno di università mi ero avvicinato alla programmazione FORTRAN, ma in modo assolutamente poco amichevole: programmi incisi su schede perforate che non tolleravano errori di battitura; quindi, quando si era convinti di aver prodotto qualcosa di decente, si depositava il pacchetto di schede in un apposito contenitore da dove l'operatore lo dava in pasto all'UNIVAC del centro di calcolo; quindi dopo un certo tempo nel quale bisognava conteggiare lo spirito collaborativo sia dell'operatore che delle stampanti, che spesso accartocciavano tutto, si aveva un lungo listato. Inutile dire che bastava aver fatto un minimo errore di sintassi, come dimenticare di chiudere una parentesi, che il compilatore non capiva più niente e, sdegnato, stampava una lunga serie di 'insulti'. E ricomincia da capo! Nel seguito le cose sono migliorate, grazie alla diffusione dei monitor e degli editori di testo, che hanno eliminato completamente il supporto cartaceo, almeno per i programmi. Successivamente sono arrivati i personal computer e i portatili, che hanno reso le cose ancora più facili, mentre anche sul fronte di linguaggi c'era una certa varietà e quindi si usa un approccio 'multilanguage', ovvero usare quello più adatto ai diversi compiti o che si integrava meglio con il lavoro di squadra: FORTRAN, Basic, Assembler, C, OS-9, Maple, Mathematica, Perl, Javascript, Php, Python, C++, Java, oltre a Paw e Gnuplot per la grafica (la quale era anche incorporata in Maple e Mathematica).

La scoperta di R è stata più o meno casuale e la cosa che mi piacque subito fu il fatto che fosse un linguaggio di scripting: non hai bisogno di scrivere le due righe che a volte ti servono per risolvere un piccolo problema su un file e procedere quindi a compilazione, 'link' ed esecuzione. E nemmeno devi definire accuratamente tutte le variabili, cosa indubbiamente importante se devi scrivere un programma 'critico', nel quale non vuoi correre il rischio di errori e/o che deve girare alla massima velocità, perché magari sarà eseguito miliardi di volte al giorno. Poi in R puoi trattare in modo compatto dei 'vettori' di numeri, anche complessi, e hai già a disposizione le funzioni grafiche, bene integrate con il linguaggio, oltre a tante funzioni matematiche e statistiche. Infine, R permette di scrivere e usare in modo estremamente semplice funzioni scritte dall'utente. Il risultato è che mentre una volta la sola idea di imbarcarsi in una lunga serie di passaggi per risolvere un problemino di qualche riga mi scoraggiava, ora, se ho un computer a portata di mano, apro una sessione di R anche, come si dice, per il conto della spesa. Dopo un po' di tempo mi sono accorto che ricorrevo a Mathematica soltanto le poche volte in cui dovevo trovare soluzioni esatte mediante calcoli simbolici.

Veniamo ora all'uso nelle scuole. Come si diceva, mentre l'introduzione di calcolatrici scientifiche economiche ha 'rivoluzionato' l'insegnamento, permettendo allo studente di concentrarsi sui concetti, senza la grande perdita di tempo di calcolarsi radici e potenze, logaritmi e funzioni trigonometriche, francamente non mi sembra che all'introduzione dei computer sia corrisposta una rivoluzione altrettanto significativa. Sì, ovviamente ci sono insegnanti di buona volontà che, ad esempio usano, Cabrì per facilitare l'apprendimento della geometria, o che fanno un minimo di programmazione. Ma in sostanza mi sembra che l'uso del computer nelle scuole si limiti, oltre alle pessime 'ricerche' fatte scaricando e stampando pagine trovate a caso su internet, alla video scrittura, alla organizzazione di informazioni mediante fogli di calcolo e poco più. Certo, tutte cose interessanti ed è già una bella cosa che i ragazzi abbiano delle idee di cosa siano file, cartelle, come farne delle copie e cambiare nomi, e così via. Ma è ben poca cosa se confrontata alle potenzialità che i computer di oggi offrono, soprattutto per facilitare la comprensione di matematica e fisica.

Per esempio, prendiamo l'insegnamento delle fisica, oggi ritenuto importante non soltanto perché alla base delle altre scienze del mondo, ma perché paradigmatico di un certo modo di approcciare i problemi in modo 'scientifico'. Ho sempre trovato un peccato che alle superiori, compreso il liceo scientifico, si insegni la meccanica quando gli studenti non hanno ancora appreso l'*abc* del calcolo differenziale, una tecnica inventata più di tre secoli fa **proprio** per risolvere problemi di fisica. Da alcuni anni mi sono posto la domanda, che ho rivolto anche ad altri colleghi, se sia possibile insegnare i rudimenti del calcolo differenziale nel biennio, in modo tale da essere completato e applicare alla fisica dal terzo anno. In questo modo veramente avrebbero la possibilità di fare la fisica in modo 'serio' al liceo e familiarizzarsi con il calcolo differenziale. Ammetto che non tutti sono d'accordo, anche se molti colleghi fisici e matematici dicono che la cosa <u>è</u> fattibile, ovviamente a delle condizioni. Di parere contrario sembrano invece i pochi insegnanti delle superiori con i quali ho interloquito e forse, essendo quelli che operano direttamente sul campo, potrebbero anche avere ragione, ma non ne sono convinto, come non ne sono convinti altri amici e colleghi.

Certo, non si può nemmeno sperare di provare ad insegnare il calcolo differenziale se si vogliono contemporaneamente conservare i programmi attuali. Si tratta quindi di riorganizzare i contenuti, spostando qualcosa di non 'urgente' al triennio, dando la priorità alla familiarizzazione del concetto di funzione, magari illustrando in modo non rigoroso dei concetti che saranno affrontati con maggiore dettaglio e rigore successivamente. Insomma è quanto si faceva una volta nei vecchi programmi nei quali ad esempio la letteratura italiana veniva proposta in un primo 'giro' al ginnasio e riproposta in un secondo 'giro' al liceo, dopo che c'era stato un primissimo giro alle medie. Questa idea va esattamente nella direzione opposta del trend attuale, nel quale la fisica viene insegnata già dal primo anno delle superiori. Nel biennio si ripete più o meno il chiacchiericcio delle medie, con il risultato di annoiare i ragazzi, senza che nel capo dei cinque anni la si possa affrontare seriamente. E all'università ricominciano ancora una volta da capo. Immaginate se ogni volta dovessimo ricominciare da "*rosa, rosae*"!

Cosa c'entra questo con R? Ad esempio mi si dice che un ostacolo all'insegnamento del calcolo differenziale sia dovuto al fatto che lo studente debba avere il tempo per familiarizzarsi precedentemente con il concetto di funzione. D'accordissimo, ma cosa c'è di meglio per favorire tale apprendimento che visualizzare graficamente funzioni di vario tipo in modo molto semplice? Oppure, si dice che un prerequisito "*sine qua non*" è lo studio dei limiti. In realtà anche questo è un falso problema, se si accetta il fatto che si può cominciare con funzioni continue e 'tranquille' e che, come mostrato in questo testo, si può arrivare al calcolo delle "pendenze locali" senza affrontare di petto il problema filosofico dal rapporto di due grandezza infinitamente piccole. [1] Se quindi si comincia con i polinomi, le cose diventano veramente semplici e poi, a mano a mano che, nel corso degli anni si incontrano altre funzioni, siano esse esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche, ci si porrà il problema di calcolarne la derivata. Insomma, esattamente l'opposto di quello che si fa attualmente: invece di accumulare un bagaglio di funzioni e, una volta appreso il calcolo differenziale, applicarlo a tutte le funzioni che si conoscono, si impara il calcolo differenziale su alcune funzioni facili e successivamente si impara a differenziare funzioni più complicate. E, comunque, una volta che uno ha capito il concetto di derivata e che è virtualmente in grado di calcolarla nei casi facili il grosso è fatto. Poi può anche delegare ad un software il suo calcolo – e R sa fare anche le derivate! – un po' come negli ultimi decenni abbiamo delegato alle calcolatrici scientifiche le operazioni aritmetiche a più cifre e l'estrazione di radici quadrate.

Va vista in quest'ottica la scelta di approcciare le questioni di grafica fin dal secondo capitolo, allo scopo di attirare l'attenzione degli studenti con qualcosa assimilabile a gioco ma che nel contempo li aiuti a familiarizzarsi con il piano cartesiano. Per lo stesso motivo la scrittura delle funzioni viene già illustrata nel terzo paragrafo del primo capitolo.

Un'altra peculiarità dello scritto è di pretendere di essere un testo *multilevel*, indirizzato contemporaneamente a studenti sia delle scuole superiori che a universitari e giovani ricercatori e addirittura, almeno parti del primo e del secondo capitolo, ai ragazzi delle scuole medie. Ciò significa che non è necessario che esso sia letto in modo sequenziale. Ad esempio, chi è interessato allo studio di funzioni, dopo i primi paragrafi del secondo capitolo può passare al terzo capitolo, saltare quindi il quarto, sul quale si può eventualmente ritornare nel seguito, e affrontare direttamente il quinto. Ritengo inutile tracciare tutti i percorsi possibili, rimettendo la scelta alla sensibilità e al buon senso dell'insegnante.

[1] I concetti di limite e di pendenza, in situazioni "normali", sono assolutamente naturali. E storicamente l'evoluzione dei concetti ha seguito proprio questa via (basti pensare alla disinvoltura con cui Eulero maneggiava le serie infinite) e solo nell'Ottocento è stato rivisto tutto nell'ottica rigorosa degli 'epsilon' piccoli a piacere.