11.3

Di nuovo su **molla**. Se la lunghezza iniziale[6] era L_0 e aggiungo una massa $m \rightarrow$ posizione di equilibrio L_{eq}, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il basso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;=\; 0\,. \tag{177}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) & (178)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x & (179)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. & (180)\end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo

$$a_x(x) = -(k/m)\,x\,, \tag{181}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{182}$$

$\Rightarrow$ Ricorda qualcosa?

[6]In realtà, non è necessario assumere una completa linearità della molla (che fra l'altro non puè esistere per sollecitazioni troppo piccole o troppo grandi). Assumiamo di avere una generica espressione della forza in funzione dell'allungamento: $F(L) = f(L)$, tale che, comunque, data una certa forza applicata mg l'allungamento di equilibrio sia per L_{eq}, ovvero

$$mg - f(L_{eq}) \;=\; 0\,. \tag{172}$$

Sviluppando in serie $f(L)$ intorno a L_{eq} e chiamando x la differenza fra L e L_{eq} (come nel testo), abbiamo:

$$F(L_{eq} + x) \;=\; f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x\,, \tag{173}$$

da cui la forza totale

$$\begin{aligned} F_x &= mg - F(L_{eq} + x) = mg - \left[f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x\right] & (174)\\ &= [mg - f(L_{eq})] - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x & (175)\\ F_x(x) &= -k\,x & (176)\end{aligned}$$

11.4

Pozzo per il centro della Terra. Forza gravitazionali fra corpi non puntiformi: $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\,\mu_i\,m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se m è di un corpo puntiforme). Attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa (consequenze del teorema di Gauss: dimostrato a lezione che gusci sferici aventi densità di massa uniforme non producono alcuna forza su masse all'interno di essi). Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': forza gravitazionale in funzione della distanza R dal centro della Terra.

$$\begin{aligned} F(R) &= -\frac{G\,M(R)\,m}{R^2} && (183)\\ &= -\frac{G\,\rho\,V(R)\,m}{R^2} && (184)\\ &= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,R^3\,m}{R^2} && (185)\\ &= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,R && (186)\end{aligned}$$

ove ρ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Questa espressione è valida nella metà del pozzo da noi al centro della Terra. Per esetenderla nella seconda metà, sostituiamo nella formula R con r, indicando con quest'ultima una coordinata lungo il pozzo, che ha origine nel centro della Terra e verso positivo verso di noi:

$$F(r) = -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r. \qquad (187)$$

Si può verificare facilemente che in entrambe le metà del pozzo (corrispondneti a $r > 0$ e $r < 0$) la forza è sempre diretta verso il centro della Terra.

Da "$F = m\,a$" e ricordandoci che si tratta di un'accelerazione lungo il raggio, segue

$$\begin{aligned} a_r(r) &= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r, && (188)\\ &= -\frac{g}{R_T}\,r\,, && (189)\end{aligned}$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che sulla superficie della Terra, ovvero per $r = R$, deve valere $a_r(R_T) = -g$, ovvero $-\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T = -g$,