Corso di Laurea in Fisica – Meccanica – A. A. 2007-2008

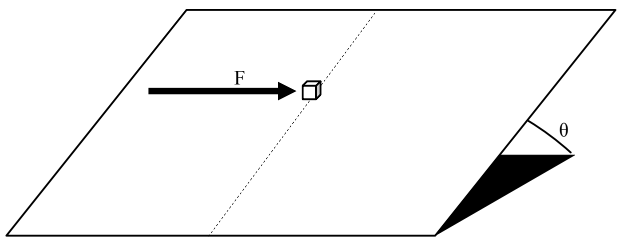
I Esonero

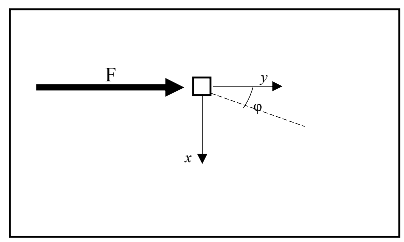
30 aprile 2008

Esercizio n. 1

Un corpo di massa m=5.2 kg si trova su un piano inclinato con angolo θ=20° rispetto all'orizzontale e coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente μ_s=0.41 e μ_d=0.32.

a) Se al corpo viene applicata orizzontalmente (direzione y) una forza costante, calcolare per quale valore minimo di F il corpo incomincerà a muoversi e con quale angolo φ rispetto all'orizzontale.
b) Per tale valore F_{min}, supponendo che il corpo parta da una quota h=1.4 m, calcolare le componenti dell'accelerazione lungo gli assi x e y riportati in figura.
c) Facendo riferimento alla situazione relativa al punto 2, calcolare quanto tempo impiega il corpo per arrivare in fondo al piano inclinato e di quanto si è spostato complessivamente in direzione orizzontale (asse y). Si ricordi che durante il moto la forza F_{min} è costante in modulo, direzione e verso.

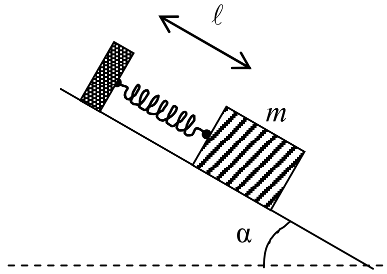




Esercizio n.2

Un corpo di massa m=500 g è posto su un piano inclinato di un angolo α=40° rispetto all'orizzontale. La massa è collegata ad una molla di costante elastica k=10 N/m e lunghezza a riposo $\ell_0 = 20\,\text{cm}$. All'altro estremo la molla è vincolata al piano tramite un supporto fisso (vedi figura). Il piano è scabro e i coefficienti di attrito statico e dinamico tra la massa e il piano sono pari a $\mu_s = 0.40$ e $\mu_d = 0.30$.

a) Si calcoli l'intervallo di lunghezze ℓ della molla per cui la massa rimane in equilibrio.
b) Si supponga che a $t = 0$ la lunghezza della molla sia $\ell_i = 80\,\text{cm}$ e che la velocità del corpo sia nulla. Successivamente la lunghezza della molla diminuisce fino a raggiungere un valore minimo $\ell_{\min}$. Si calcoli $\ell_{\min}$ ed il lavoro compiuto dalla forza di attrito e dalla forza elastica quando la lunghezza della molla varia tra ℓ_i e $\ell_{\min}$.
c) Si calcoli il tempo $t_{\min}$ al quale la lunghezza della molla è $\ell_{\min}$.



Soluzioni

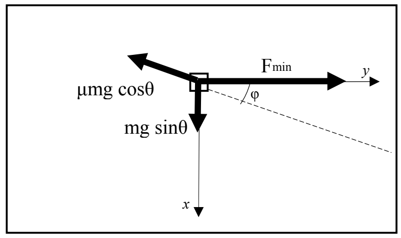
Esercizio n.1

1) Calcolando il diagramma delle forze agenti sul corpo, ed imponendo che il modulo della forza totale sia uguale alla forza massima di attrito statico, si trova il valore di F_{min}:

$$F^2 + (mg\sin\theta)^2 \geq (\mu_s mg\cos\theta)^2 \qquad F_{\min} = mg\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta} = 9.0\ \mathrm{N}$$

La direzione iniziale della traiettoria è data dal rapporto tra le due forze agenti sul corpo considerando che la forza di attrito dinamico non cambia la direzione imposta da F e $mg\sin\theta$ in quanto il corpo parte da fermo.

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}} = 1.93 \qquad \varphi = 63° = 1.1\ \mathrm{rad}$$



2) Siccome nessuna forza dipende dal tempo o dalla posizione, la direzione rimane costante e il moto nelle due direzioni, x e y, è un moto uniformemente accelerato con accelerazioni:

$$a_y = g\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta} - \mu_d g\cos\theta\cos\varphi = \left(1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}\right) g\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta} = 0.38\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$a_x = g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta\sin\varphi = \left(1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}\right) g\sin\theta = 0.74\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

3) Il tempo impiegato per arrivare alla fine del piano inclinato sarà: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{a_x\sin\theta}} = 3.3\ \mathrm{s}$

Lo spostamento in orizzontale sarà: $\Delta y = \dfrac{1}{2}a_y t^2 = \dfrac{h}{\sin\theta}\dfrac{a_y}{a_x} = \dfrac{h\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}}{\sin^2\theta} = 2.1\,\mathrm{m}$

Esercizio n.2

a)
Sulla massa agiscono la forza elastica, la forza peso, la reazione vincolare e la forza di attrito. Definendo x la deformazione della molla rispetto alla posizione di riposo e proiettando il secondo principio della dinamica lungo la direzione parallela e perpendicolare al piano si ottiene:

$$\begin{cases} -kx + mg\sin\alpha + F_a = m\ddot{x} \\ R - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

dove $x = \ell - \ell_0$. Se la massa è in quiete abbiamo $\ddot{x} = 0$. Dunque
$F_a = +kx - mg\sin\alpha$.

Poiché deve valere $|F_a| \leq \mu_s R = \mu_s mg\cos\alpha$ abbiamo

$$\left|kx - mg\sin\alpha\right| \le \mu_s mg\cos\alpha$$
che dà
$$\ell_0 + \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha\right) \le \ell \le \ell_0 + \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha\right)$$
$36cm \le \ell \le 67cm$.

b)
Per calcolare $\ell_{\min}$ si può procedere in due modi:
1. utilizzando il teorema dell'energia cinetica
2. ricavando l'equazione oraria del moto.

1. Teorema energia cinetica:

Abbiamo:
$$L = \Delta T = 0$$
$$L = L_e + L_p + L_a$$
$$L_e = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_{\min}^2$$
$$L_p = -mg\sin\alpha\left(x_i - x_{\min}\right)$$
$$L_a = -\mu_d mg\cos\alpha\left(x_i - x_{\min}\right)$$
$$-\frac{1}{2}kx_{\min}^2 + \left(mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha\right)x_{\min} - \left(mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha\right)x_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = 0$$

Questa equazione di secondo grado ha come soluzioni:
$$x_{\min} = \begin{cases} x_i = l_i - l_0 \\ -x_i + 2\frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha\right) = 26cm \end{cases}.$$

La seconda delle soluzioni ottenute è quella cercata (la prima è ovvia poiché coincide con la posizione iniziale).
La lunghezza minima della molla è
$\ell_{\min} = \ell_0 + x_{\min} = 46$ cm .

2. Equazione oraria

L'equazione oraria è soluzione dell'equazione differenziale:
$$-kx + mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x}$$
dove abbiamo usato $F_a = \mu_d R = \mu_d mg\cos\alpha$.

La soluzione è del tipo
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha\right)$$
di pulsazione $\omega = \sqrt{k/m} = 4.5\,\mathrm{s}^{-1}$.

La condizione che la velocità iniziale sia nulla dà $\varphi = 0$. Inoltre a *t=0* abbiamo $x = x_i = \ell_i - \ell_0$ quindi

$$A = x_i - \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\right).$$

Da cui si ottiene

$$x = \left[x_i - \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\right)\right]\cos(\omega t) + \frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\right).$$

L'allungamento minimo si ha quando $\cos(\omega t) = -1$, dunque

$$x_{\min} = -x_i + 2\frac{mg}{k}\left(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha\right) = 26cm$$

$$\ell_{\min} = \ell_0 + x_{\min} = 46cm$$

La forza di attrito è costante durante il moto e il modulo vale $F_a = \mu_d R = \mu_d mg\cos\alpha$. Il lavoro (negativo) è quindi

$$L = -F_a\left(x_i - x_{\min}\right) = -\mu_d mg\cos\alpha\left(x_i - x_{\min}\right) = -0.39J.$$

Il lavoro della forza elastica si calcola dalla variazione di energia potenziale:

$$L_e = -\Delta U = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_{\min}^2 = 1.5\,\mathrm{J}.$$

c)

Il moto del punto materiale tra ℓ_i e $\ell_{\min}$ è descritto da una legge analoga a quella di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$ (le altre forze in gioco sono tutte costanti). Poiché la massa parte da ferma, la posizione di minima lunghezza si raggiunge dopo un tempo pari a mezzo periodo:

$$t_{\min} = T/2 = \left(2\pi/\omega\right)/2 = \pi/\omega = 0.70s$$

Anche in questo caso si poteva partire dall'equazione oraria notando che la velocità si annulla per la prima volta abbiamo $\cos(\omega t) = -1$, dunque

$$t_{\min} = \pi/\omega = 0.70s$$