Corso di Laurea in Fisica – Meccanica – A. A. 2007-2008

II Esonero

11 Giugno 2008

[a]

Una sbarra lineare omogenea di lunghezza $L=2.00\ m$ e massa $M=2.50\ kg$, incernierata nel suo estremo A, è posta inizialmente in quiete in posizione verticale, come mostrato in figura.
Ad un certo istante, un proiettile puntiforme di massa $m=0.500\ kg$, con velocità iniziale ortogonale alla sbarra e di modulo $v_0=12.0\ m/s$, urta la sbarra in corrispondenza del punto P che dista $\frac{3}{4} \cdot L$ dall'estremo A.
Supponendo l'urto totalmente anelastico, calcolare il valore, subito dopo l'urto:

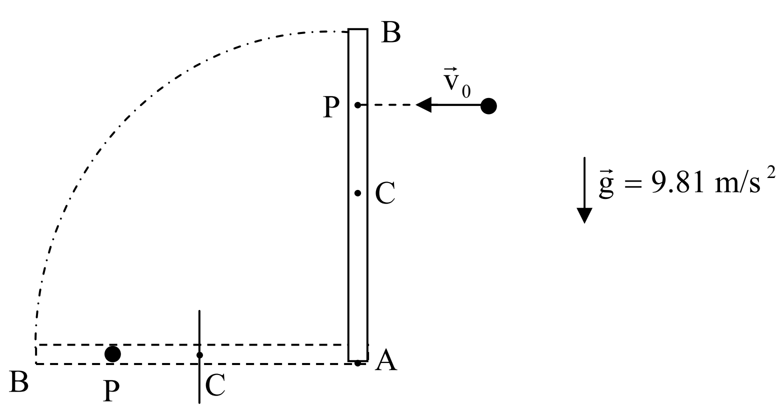
(1) del momento d'inerzia del sistema costituito dalla sbarra e dal proiettile;
(2) della velocità angolare ω_0 del sistema;
(3) dell'energia cinetica K_0 del sistema.

A seguito dell'urto, il sistema è quindi messo in rotazione senza attriti attorno ad un asse ortogonale alla sbarra e passante per A, finché la sbarra non si dispone orizzontalmente.
Calcolare, quando la sbarra è in orizzontale:

(4) il modulo della velocità lineare della massa m;
(5) la reazione vincolare, in direzione, verso e modulo, esercitata dal perno in A.

Quando la sbarra è orizzontale, si verifica una frattura nel punto C (centro della sbarra) e la sbarra si spezza istantaneamente in due frammenti di uguale lunghezza $L/2$. Il frammento AC rimane vincolato in A. Supporre che, durante la frattura, il lavoro delle forze interne sia nullo.

(6) Calcolare le energie cinetiche di ciascuno dei due frammenti immediatamente dopo la frattura.
(7) Calcolare la distanza tra il punto A e il centro di massa del frammento BC dopo che è trascorso un tempo $t^*=0.500\ s$ dalla frattura.
(8) Calcolare, al tempo t^*, l'angolo di cui è ruotato il frammento BC.



Corso di Laurea in Fisica – Meccanica – A. A. 2007-2008

II Esonero

11 Giugno 2008

[b]

Una sbarra lineare omogenea di lunghezza $L=2.00\ m$ e massa $M=2.50\ kg$, incernierata nel suo estremo A, è posta inizialmente in quiete in posizione verticale, come mostrato in figura.
Ad un certo istante, un proiettile puntiforme di massa $m=0.500\ kg$, con velocità iniziale ortogonale alla sbarra e di modulo $v_0=12.0\ m/s$, urta la sbarra in corrispondenza del punto P che dista $\frac{1}{4}\cdot L$ dall'estremo A.
Supponendo l'urto totalmente anelastico, calcolare il valore, subito dopo l'urto:

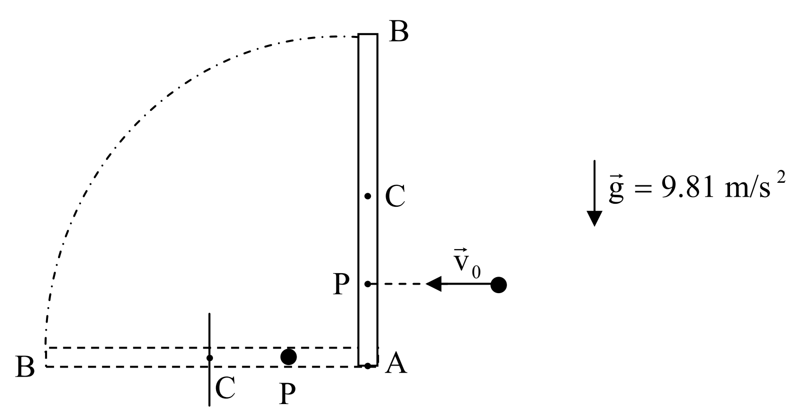
(1) del momento d'inerzia del sistema costituito dalla sbarra e dal proiettile;
(2) della velocità angolare ω_0 del sistema;
(3) dell'energia cinetica K_0 del sistema.

A seguito dell'urto, il sistema è quindi messo in rotazione senza attriti attorno ad un asse ortogonale alla sbarra e passante per A, finché la sbarra non si dispone orizzontalmente.
Calcolare, quando la sbarra è in orizzontale:

(4) il modulo della velocità lineare della massa m;
(5) la reazione vincolare, in direzione, verso e modulo, esercitata dal perno in A.

Quando la sbarra è orizzontale, si verifica una frattura nel punto C (centro della sbarra) e la sbarra si spezza istantaneamente in due frammenti di uguale lunghezza $L/2$. Il frammento AC rimane vincolato in A. Supporre che, durante la frattura, il lavoro delle forze interne sia nullo.

(6) Calcolare le energie cinetiche di ciascuno dei due frammenti immediatamente dopo la frattura.
(7) Calcolare la distanza tra il punto A e il centro di massa del frammento BC dopo che è trascorso un tempo $t^*=0.500\ s$ dalla frattura.
(8) Calcolare, al tempo t^*, l'angolo di cui è ruotato il frammento BC.



Soluzioni

Chiamiamo d la distanza $\overline{AP}$ che identifica la posizione della massa m rispetto al polo A.

$$d = \begin{cases} [\text{a}]\ 1.5\ m \\ [\text{b}]\ 0.5\ m \end{cases}$$

(1) L'urto tra sbarra e proiettile è totalmente anelastico: il proiettile rimane conficcato nella sbarra in corrispondenza della posizione P. Calcolando i momenti rispetto ad A:

$$I_{TOT}^{(A)} = I_M + I_m = \frac{ML^2}{3} + md^2 = \begin{cases} [\text{a}]\ \frac{M}{3}L^2 + m\frac{9}{16}L^2 = 4.46\ kg\ m^2 \\ [\text{b}]\ \frac{M}{3}L^2 + m\frac{1}{16}L^2 = 3.46\ kg\ m^2 \end{cases}$$

(2) Nell'urto si conserva il momento angolare:

$$m\text{v}_0 d = I_{TOT}\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{m\text{v}_0 d}{I_{TOT}} = \begin{cases} [\text{a}]\ 2.02\ s^{-1} \\ [\text{b}]\ 0.867\ s^{-1} \end{cases}$$

(3) L'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto è $K_0 = \frac{1}{2} I_{TOT}\omega_0^2 = \begin{cases} [\text{a}]\ 9.10\ J \\ [\text{b}]\ 1.30\ J \end{cases}$

(4) Il sistema è messo in rotazione e raggiunge la posizione in cui la sbarra è orizzontale. Essendo la rotazione senza attriti, durante il moto si ha *conservazione dell'energia meccanica*. Scegliendo come livello di riferimento del potenziale gravitazione la quota del punto A, si ottiene: $K_0 + U = K_f \Rightarrow \frac{1}{2} I_{TOT}\omega_0^2 + mgd + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_{TOT}\omega_f^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} I_{TOT}\omega_0^2 + mgd + Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{2} I_{TOT}}} = \begin{cases} [a]\ 4.29\ s^{-1} \\ [b]\ 4.04\ s^{-1} \end{cases} \Rightarrow \text{v}_\text{f}^{(\text{m})} = d\omega_f = \begin{cases} [a]\ 6.44\ \text{m/s} \\ [b]\ 2.02\ \text{m/s} \end{cases}$$

(5) Scegliamo un sistema di riferimento con asse $\hat{x}$ orizzontale, positivo verso destra e asse $\hat{y}$ verticale, positivo verso il basso.

Per calcolare la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata in A quando la sbarra è orizzontale, consideriamo le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi.

La prima equazione cardinale descrive il moto del centro di massa, ovvero di un punto materiale di massa *(M+m)* che, sotto l'azione della forza peso e della reazione vincolare, si muove di moto circolare su una circonferenza con centro in A e raggio ℓ, essendo ℓ la posizione rispetto ad A del centro di massa del sistema costituito da sbarra e proiettile:

$$\ell = \frac{M\frac{L}{2} + md}{M + m}$$

La dinamica del centro di massa può essere descritta scomponendo il moto in direzione radiale $(\hat{n})$ e in direzione tangenziale $(\hat{\tau})$ e considerando $\vec{a} = a_n \hat{n} + a_\tau \hat{\tau}$ con $\begin{cases} a_n = \omega^2 \ell \\ a_\tau = \ell \dot{\omega} \end{cases}$

$\dot{\omega}$ è l'accelerazione angolare, che si ricava dalla seconda equazione cardinale calcolando il momento della forza peso rispetto al polo *A* (la reazione vincolare ha momento nullo).

Quando la sbarra è orizzontale:

- la prima equazione cardinale della dinamica, proiettata in direzione radiale e in direzione tangenziale, si scrive: $\begin{cases} (\hat{n} \equiv \hat{x}) \quad R_x = (M+m)a_n = (M+m)\omega^2 \ell \\ (\hat{\tau} \equiv \hat{y}) \quad (M+m)g + R_y = (M+m)a_\tau = (M+m)\dot{\omega} \cdot \ell \end{cases}$
- $\omega = \omega_f$, ricavata al punto (4) imponendo la conservazione dell'energia meccanica;
- la forza peso è ortogonale alla sbarra, e quindi, dalla seconda equazione cardinale: $(M+m)g\ell = I_{TOT}\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{(M+m)g\ell}{I_{TOT}}$

Sostituendo ℓ, ω e $\dot{\omega}$ e risolvendo le equazioni del moto rispetto a R_x e R_y si trova:

$$R_x = \omega_f^2 \left(M \frac{L}{2} + md \right) = \begin{cases} [a]\, 59.7\, N \\ [b]\, 45.0\, N \end{cases}$$

$$R_y = (M+m)(\dot{\omega} \cdot \ell \text{ -} g) = g(M+m) \left(\frac{\left(M \frac{L}{2} + md \right)^2}{I_{TOT}(M+m)} - 1 \right) = \begin{cases} [a] \ \text{-}6.20 N \\ [b] \ \text{-}7.99 N \end{cases}$$

La componente R_x è responsabile della forza centripeta che mantiene la traiettoria circolare del centro di massa. Il segno meno per la componente R_y indica che, quando la sbarra è orizzontale, R_y ha verso opposto alla forza peso.

La direzione del vettore $\vec{R}$ rispetto all'orizzontale è definita dall'angolo φ tale che

$$\tan \varphi = \frac{|R_y|}{|R_x|} \Rightarrow \varphi = a\tan\left(\frac{|R_y|}{|R_x|} \right) = \begin{cases} [a]\, 0.104\, rad = 5.96^\circ \\ [b]\, 0.176\, rad = 10.1^\circ \end{cases}$$

(6) Quando la sbarra è orizzontale, il sistema si spezza a metà e si divide in due frammenti di uguale lunghezza *L/2*. Indichiamo con 1 il segmento *BC* e con 2 il segmento *AC*. Per ognuno dei frammenti, il centro di massa si trova nel punto di mezzo di ciascun frammento, rispettivamente a $\ell_1 = \frac{3}{4} L$ e $\ell_2 = \frac{1}{4} L$, distanze misurate dal punto *A* quando la sbarra è orizzontale.

Durante il processo di frattura, si conservano il momento angolare calcolato rispetto ad *A* e l'energia meccanica (ovvero, l'energia cinetica, essendo tutto il sistema alla quota di riferimento):

$$\begin{cases} I_{TOT}\omega_f = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \\ \frac{1}{2}I_{TOT}\omega_f^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = K_1 + K_2 \end{cases}$$

Nel caso [a] $\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{2}+m\right)\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = 4.04\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \\ I_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0.417\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \end{cases}$

Nel caso [b] $\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{3}{4}L\right)^2 = 2.92\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \\ I_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = 0.542\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \end{cases}$

Notare che, in ogni caso, $I_{TOT} = I_1 + I_2$ e il risultato del calcolo coincide con quanto già calcolato al punto (1).

Risolvendo il sistema, e sostituendo $I_{TOT} = I_1 + I_2$ si trova:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{I_{TOT}\omega_f - I_2\omega_2}{I_1} = \omega_f \\ \omega_2 = \frac{I_{TOT}}{I_1+I_2}\omega_f\left(1 \pm \sqrt{1+\left(\frac{I_1+I_2}{I_{TOT}}\right)\left(\frac{I_1 - I_{TOT}}{I_2}\right)}\right) = \omega_f \end{cases}$$

Ciascuno dei due frammenti continua a ruotare in verso antiorario, con la stessa velocità angolare che si aveva prima della frattura. Le energie cinetiche sono quindi:

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_f^2 = \begin{cases} [a]\ 37.2\ J \\ [b]\ 23.8\ J \end{cases}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_f^2 = \begin{cases} [a]\ 3.83\ J \\ [b]\ 4.42\ J \end{cases}$$

(7) Il moto del frammento BC è la combinazione del moto di traslazione del centro di massa e del moto di rotazione del sistema attorno ad un asse ortogonale al frammento e passante per il centro di massa. La rotazione è una rotazione libera, cioè avviene attorno a un asse principale di inerzia: $\vec{M} = 0$ e quindi con *ω=costante=ω_f.*

Ponendo *t=0* l'istante della frattura, la velocità del centro di massa del frammento 1 immediatamente dopo la frattura vale $v_1(t=0) = \ell_1\omega_1$. La direzione è lungo l'asse $\hat{y}$, ovvero parallela alla forza peso (la velocità del centro di massa non ha componenti lungo l'orizzontale). Questo valore rappresenta la condizione iniziale per la velocità del centro di massa, che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato in direzione $\hat{y}$ sotto l'azione della sola forza peso.

La legge oraria del centro di massa è quindi: $y_1(t) = y_1(t=0) + \ell_1 \omega_f t + \frac{1}{2} g t^2$.
$y_1(t=0)$ coincide con la quota del punto *A*. Ponendo questa quota coincidente con l'origine del riferimento, si trova, per *t=t**, $y_1(t^*) = \ell_1 \omega_f t^* + \frac{1}{2} g (t^*)^2 = \begin{cases} [a] = 4.44\ \mathrm{m} \\ [\mathrm{b}] = 4.26\ \mathrm{m} \end{cases}$

Essendo il moto del centro di massa un moto rettilineo e lungo $\hat{y}$, la coordinata *x* del centro di massa è costante nel tempo, cioè $x_1(t^*) = x_1(t=0) = \ell_1 = \frac{3}{4} L = 1.5\, m$

Quindi, la distanza del centro di massa del segmento *BC* dal punto *A* è, al tempo *t**,
$D(t^*) = \sqrt{(x_1(t^*))^2 + (y_1(t^*))^2} = \begin{cases} [a] = 4.69\, m \\ [b] = 4.52\, m \end{cases}$

(8) Come già descritto al punto (7), la rotazione del segmento *BC* attorno al centro di massa avviene con velocità costante ω_f, ovvero la variazione nel tempo dell'angolo di rotazione segue la legge oraria $\theta(t) = \omega_f t$. In corrispondenza di *t** si trova:
$\theta(t^*) = \omega_f t^* = \begin{cases} 2.15\ \mathrm{rad} = 123^\circ \\ 2.02\ \mathrm{rad} = 116^\circ \end{cases}$

Frammento AC

Il moto del frammento AC è un moto di rotazione rigida attorno all'asse ortogonale al frammento e passante per *A*, sotto l'azione del momento della forza peso, con velocità angolare iniziale pari a $\omega_2 = \omega_f$. Analiticamente, definendo *α* l'angolo che il frammento *AC* forma con la direzione orizzontale (*α=0* all'istante della frattura) e applicando la seconda equazione della dinamica dei sistemi, si trova l'equazione che definisce l'accelerazione angolare: $\left(\frac{M}{2}\right) g \ell_2 \cos\alpha = I_2 \dot{\omega}$.

Il centro di massa segue una traiettoria circolare di centro *A* e raggio ℓ_2, con velocità tangenziale $\mathrm{v}_2 = \ell_2 \omega$.