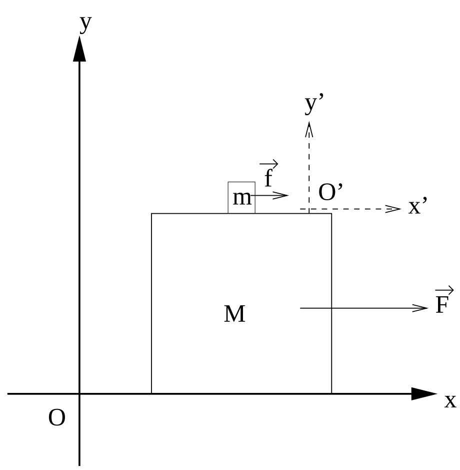
Meccanica - A.A. 2007/2008
Prova Scritta 23 Settembre 2008 - Soluzioni

Esercizio 1

Un cubo di massa $M = 3.0$ kg e lato $l = 6.0$ m è libero di muoversi su un piano orizzontale senza attrito. Al centro della superficie superiore del cubo è poggiato un corpo di massa $m = 1.0$ kg e di dimensioni trascurabili. Sia $\mu_d = 0.10$ il coefficiente di attrito dinamico tra i due corpi. Applicando al cubo una forza $\vec{F}$ orizzontale e costante, il corpo sovrastante si mette in moto scivolando sul cubo stesso. Sia $F = 5.0$ N l'intensità della forza. Calcolare:

1. l'accelerazione del corpo di massa m rispetto ad un osservatore solidale con il piano orizzontale (riferimento inerziale);
2. l'accelerazione del cubo rispetto allo stesso osservatore;
3. dopo quanto tempo il corpo di massa m cade dal bordo del cubo.



Consideriamo i sistemi di riferimento $R = (O, x, y)$ inerziale, fisso sul piano orizzontale, e $R' = (O', x', y')$ non inerziale, fisso sul cubo. In entrambi i riferimenti le forze esterne totali lungo la verticale sono nulle, quindi consideriamo le sole forze agenti sugli assi x, x'.

1. Nel riferimento R, il cubo esercita sul corpo di massa m una forza $\vec{f}$ pari all'attrito dinamico, diretta lungo x e di modulo
$$f = \mu_d m g\,.$$
Quindi il corpo di massa m si muove con moto uniformemente accelerato (fino a raggiungere il bordo del cubo) con accelerazione, lungo x,
$$(a_m)_x = \frac{f}{m} = \mu_d g = 0.98\, m/s^2\,.$$

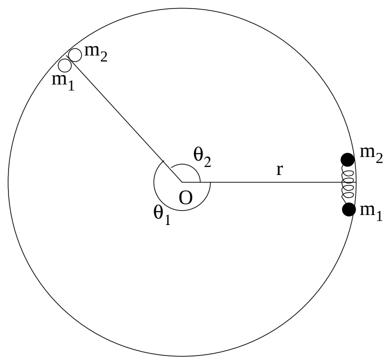
2. Sul cubo agiscono la forza $\vec{F}$ e la forza $-\vec{f}$, quindi anch'èsso si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione, lungo x,
$$(a_M)_x = \frac{F - f}{M} = 1.34\, m/s^2\,.$$
Nel riferimento R' il corpo di massa m si muove con accelerazione, lungo x,
$$(a'_m)_x = (a_m)_x - (a_M)_x = -0.36\, m/s^2$$
essendo $\vec{a}_t = ((a_M)_x, 0, 0)$ l'accelerazione di trascinamento di R' rispetto a R.

3. Il corpo di massa m cadrà dal cubo quandro avrà percorso lo spazio $d = l/2$, nel tempo t' dato da
$$d = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(-(a'_m)_x)t'^2 \quad \Rightarrow \quad t' = \sqrt{\frac{l}{(-(a'_m)_x)}} = 4.1\, s\,.$$

Esercizio 2

Su una guida circolare di raggio $r = 1.0$ m liscia, posta in un piano orizzontale, stanno due masse $m_1 = 0.20$ kg, $m_2 = 1.0$ kg, libere di scorrere nella guida. Esse sono tenute da due fermi nella posizione illustrata in figura, in modo da comprimere una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 4.0 \cdot 10^2$ N/m, alla quale sono semplicemente appoggiate. All'istante $t = 0$ si tolgono i fermi, e le due masse vengono lanciate in direzioni opposte dall'espansione della molla. Si trascurino la distanza iniziale tra le due masse e il tempo impiegato dalla molla per accelerarle.

1. A quale angolo θ le due masse si urteranno?
2. Se la molla era compressa di un tratto $x_0 = 5$ cm, in quale istante t avverrà l'urto?
3. Supponendo che l'urto sia perfettamente elastico e centrale, a quale angolo θ' si incontreranno le masse la seconda volta?



1. Calcoliamo i momenti rispetto al polo O. Poichè l'unica forza esterna agente sul sistema è la reazione della guida, che, essendo la guida priva di attrito, ha momento nullo rispetto al polo O, si conserverà il momento angolare calcolato rispetto al polo O, pari alla somma di quelli associati alle due masse m_1 ed m_2:
$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} = cost\,.$$
Essi sono diretti ortogonalmente alla guida. Prendiamo convenzionalmente come positiva la direzione entrante nel foglio, individuata dal versore $\hat{k}$, e misuriamo gli angoli in senso orario a partire dalla posizione iniziale delle masse, in modo che $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$. Allora
$$\begin{aligned} \vec{P_1} &= \vec{r} \times \vec{v_1} = m_1 r^2 \omega_1 \hat{k} \\ \vec{P_2} &= \vec{r} \times \vec{v_2} = m_2 r^2 \omega_2 \hat{k} \end{aligned}$$
con $\omega_1 = \dot{\theta}_1 > 0$, $\omega_2 = \dot{\theta}_2 < 0$.
Prima dell'espansione della molla, i corpi sono fermi e $\vec{P} = \vec{0}$; durante l'azione impulsiva della molla il momento angolare si conserva, quindi nel moto dei corpi
$$\begin{aligned} &\vec{P} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{P_1} = -\vec{P_2} \\ &m_1 r^2 \omega_1 = -m_2 r^2 \omega_2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = -\frac{m_1}{m_2}\omega_1 \\ &2\pi = \theta_1 - \theta_2 = \omega_1 t - \omega_2 t = \omega_1 t \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2\pi m_2}{\omega_1(m_1+,_2)} \\ &\theta_1 = \omega_1 t = 2\pi \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 300^o \\ &\theta_2 = \omega_2 t = -2\pi \frac{m_1}{m_1 + m_2} = -60^o\,. \end{aligned}$$

2. L'energia potenziale della molla compressa è
$$U_0 = \frac{1}{2} k x_0^2 = 0.50\,J$$
e, nell'espansione, si trasforma in energia cinetica delle palline, quindi
$$U_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} r^2 \omega_1^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) = \frac{\omega_1^2 m_1 (m_1 + m_2) r^2}{2 m_2}$$

quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2m_2U_0}{m_1(m_1+m_2)r^2}} = 2.0\,rad/s\,,$$

e l'istante dell'urto è

$$t = \frac{2\pi m_2}{\omega_1(m_1+m_2)} = 2.6\,s\,.$$

3. Dopo l'urto, il corpo m_1 descriverà un angolo θ_1' in senso orario (quindi $\theta_1' < 0$, $\omega_1' < 0$), il corpo m_2 descriverà un angolo $\theta_2' > 0$ con $\omega_2' > 0$. Il momento angolare si conserva, rimanendo nullo, e inoltre, poichè l'urto è elastico, si conserva l'energia cinetica, quindi

$$m_1r^2\omega_1' = -m_2r^2\omega_2' \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1' = -\frac{m_2}{m_1}\omega_2'$$
$$K_0 = \frac{1}{2}m_1r^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\omega_2^2 = \frac{1}{2}m_1r^2{\omega_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2{\omega_2'}^2$$

quindi

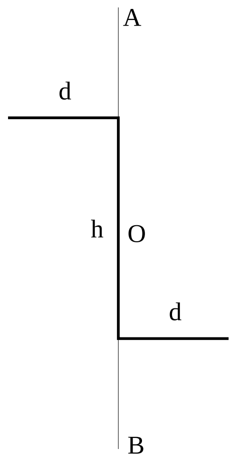
$${\omega_2'}^2\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) = \omega_2^2\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2' = \pm\omega_2 = -\omega_2$$

e $\omega_1' = -\omega_1$. I corpi hanno quindi velocità uguali e opposte a quelle che avevano prima dell'urto, e si incontreranno nel punto di partenza.

Esercizio 3

Il sistema rigido in figura è formato da una sbarra omogenea piegata come in figura (linea spessa in figura), di sezione trascurabile, massa totale $m = 5.0$ kg e lunghezza totale $L = 1.1$ m. I due tratti orizzontali sono entrambi lunghi $d = 30$ cm. Il sistema è in rotazione senza attriti con velocità angolare costante $\omega = 12$ rad/s intorno al suo tratto verticale (asse di rotazione verticale AB).

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema.
2. Calcolare la posizione del baricentro e la forza totale agente sul sistema.
3. Calcolare la componente assiale e quella trasversa del momento angolare del sistema, prendendo come polo il centro di massa della sbarra.
4. Calcolare la componente verticale e quella orizzontale del momento totale delle forze agenti sul sistema.



1. La densità lineare della sbarra è $\lambda = m/L$. La massa di ognuno dei tratti orizzontali è

$$m_1 = m_2 = \lambda d = m\frac{d}{L} = 1.4\,kg\,.$$

Il momento di inerzia di un tratto orizzontale rispetto a un asse verticale baricentrale è $m_1 d^2/12$; il momento di inerzia di ognuno dei tratti orizzontali rispetto all'asse AB si calcola con il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 d^2}{12} + m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{m_1 d^2}{3} = 4.1 \cdot 10^{-2} kg\,m^2\,.$$

Il momento di inerzia del tratto verticale, rispetto all'asse AB, è nullo (poichè si trascura la sezione della sbarra), quindi il momento di inerzia totale della sbarra è

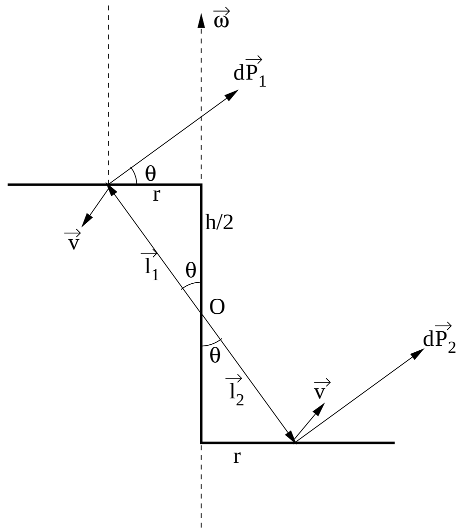
$$I = I_1 + I_2 = 8.2 \cdot 10^{-2} kg\,m^2\,.$$

Poichè il centro di massa della sbarra non si muove, la sua energia cinetica è la sola energia cinetica rotazionale:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = 5.9\,J\,.$$

2. Per simmetria, il baricentro è in O, sull'asse del sistema. La forza totale del sistema è applicata in O, e quindi, essendo O fermo, $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$.

3. Calcoliamo il momento angolare della sbarra rispetto ad O. La parte verticale è ferma, consideriamo il tratto orizzontale superiore (vedere figura).



Consideriamo un elemento di massa dm distante r dall'asse. Osserviamo che

$$l = \frac{r}{\sin\theta} = \frac{h}{2\cos\theta}\,.$$

L'elemento $dm = \lambda dr$ ha momento angolare $d\vec{P}_1$ diretto come in figura, di modulo

$$dP_1 = lvdm = l\omega r dm = \lambda\omega\frac{r^2}{\sin\theta}dr = \lambda\omega\frac{rh}{2\cos\theta}dr\,.$$

La componente assiale di dP_1 è

$$dP_1^{\|} = dP_1\sin\theta = \lambda\omega r^2 dr$$

che integrando dà

$$P_1^{\|} = \frac{\lambda\omega d^3}{3} = \frac{\omega m_1 d^2}{3}$$

ovvero, ovviamente, $P_1^{\|} = I_1\omega$. La componente trasversa di dP_1 è

$$dP_1^{\perp} = dP_1\cos\theta = \frac{1}{2}\lambda\omega h r dr$$

che integrando dà

$$P_1^{\perp} = \frac{\lambda\omega h d^2}{4} = \frac{\omega m_1 d h}{4}\,.$$

Il secondo tratto orizzontale dà un contributo uguale, come si vede in figura, quindi il momento angolare totale assiale ha modulo

$$P^{\|} = I\omega = 1.0\,kg\,m/s$$

ed ha direzione fissa, lungo l'asse AB; il momento angolare totale trasverso ha modulo

$$P^{\perp} = \frac{\omega m_1 d h}{2} = 1.2\,kg\,m/s\ .$$

La componente trasversa ha modulo costante, ma la sua direzione ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$. Il momento angolare totale è

$$\vec{P} = \vec{P}^{\|} + \vec{P}^{\perp}\,.$$

4. Per il secondo principio cardinale della dinamica dei sistemi, il momento angolare totale delle forse esterne (rispetto al polo O) è

$$\vec{M}^e = \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{\omega}\times\vec{P} = \omega P^{\perp}\hat{k}$$

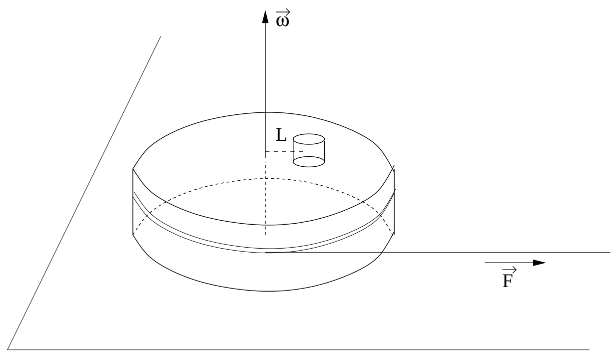
ed orizzontale ed ortogonale a $\vec{P}$, ovvero è ortogonale al piano individuato dalla sbarra. Esso è esercitato dall'asse, come reazione vincolare, poichè la forza peso non esercita momento essendo applicata in O. Il suo modulo è

$$M^e = \omega P^{\perp} = 15\,N\,m\,.$$

Esercizio 4

Una piccola giostra artigianale, di diametro $D = 50$ cm, viene fatta ruotare orizzontalmente tirando una fune avvolta intorno ad essa. Se alla fune viene esercitata una forza di modulo $F = 10$ N per un tempo $\Delta t = 1.0$ s, la giostra, partendo da ferma, compie in tale intervallo di tempo una rotazione completa.

1. Quale momento delle forze esterne $\vec{M}^{ext}$ è applicato dalla fune sulla giostra?
2. Qual'è l'accelerazione angolare $\alpha = d\omega/dt$ della giostra?
3. Qual'è il momento di inerzia I della giostra rispetto al suo asse di rotazione?
4. Successivamente, viene aggiunto sulla giostra un sedile cilindrico omogeneo di massa $m = 3.0$ kg e raggio $r = 5.0$ cm, fissato sul piano della giostra in posizione verticale, con l'asse a distanza $L = 10$ cm dall'asse di rotazione della giostra. Poi, tirando la fune, viene di nuovo applicata la forza costante F del caso precedente. Quanto vale adesso l'accelerazione angolare α' della giostra?



1. La gravità e la reazione del piano di appoggio si bilanciano, quindi l'unica forza esterna è $\vec{F}$, che è applicata tangenzialmente al bordo della giostra. Il suo momento rispetto all'asse di rotazione è diretto verticalmente come l'asse di rotazione ed ha modulo
$$M^e = \frac{FD}{2} = 2.5\, N\, m\,.$$
2. Il momento $\vec{M}^e$ è costante e diretto verticalmente; dato il momento di inerzia della giostra rispetto al suo asse di rotazione, I, l'accelerazione angolare è
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M^e}{I} = \frac{FD}{2I}\,.$$
Il moto quindi è uniformemente accelerato. La velocità angolare, se la giostra parte da ferma, è $\omega = \alpha t$, e l'angolo (prendendo convenzionalmente angolo iniziale nullo) è
$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2\,.$$
Nell'intervallo Δt la giostra compie un giro completo, quindi
$$2\pi = \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{4\pi}{\Delta t^2} = 13\, rad/s^2\,.$$
3. Il momento di inerzia della giostra è
$$I = \frac{FD}{2\alpha} = \frac{FD\Delta t^2}{8\pi} = 0.20\, kg\, m^2\,.$$
4. Il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse è $\frac{1}{2}mr^2$. Il suo momento di inerzia rispetto all'asse della giostra si calcola con il teorema di Huygens-Steiner:
$$\frac{1}{2}mr^2 + mL^2 = \frac{1}{2}m(2L^2 + r^2)\,.$$
Il momento di inerzia del sistema giostra+cilindro, rispetto all'asse della giostra, è
$$I' = I + \frac{1}{2}m(2L^2 + r^2)$$
e la nuova accelerazione angolare è
$$\alpha' = \frac{M^e}{I'} = \frac{FD}{2I'} = \frac{FD}{2I + m(r^2 + 2L^2)} = \frac{FD}{\frac{FD\Delta t^2}{4\pi} + m(r^2 + 2L^2)} = 11\, rad/s^2\,.$$