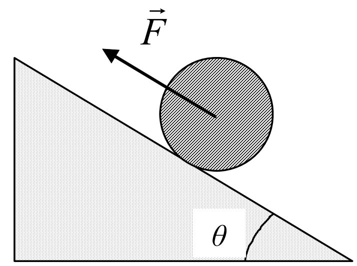
Corso di Laurea in Fisica – Meccanica dei Sistemi – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare martedì 3 Giugno 2008

Nome ………………………….Cognome ……………………………



Si consideri un cilindro omogeneo di massa $M = 2.0\ kg$ e raggio $R = 10\ cm$ che si muove su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Sull'asse del cilindro è applicata una forza $\vec{F}$ che è perpendicolare all'asse, parallela al piano inclinato e fa muovere il cilindro verso l'alto. Il coefficiente di attrito statico del piano è $\mu = 0.30$.

(1) Calcolare il momento di inerzia del cilindro. [4]
Per il calcolo del momento di inerzia, consideriamo un sistema di coordinate cilindriche $(z \in [0,H], r \in [0,R], \varphi \in [0,2\pi[)$ con asse z coincidente con l'asse di rotazione (asse del cilindro) e H altezza del cilindro. L'elemento infinitesimo di massa dm è dato da $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot r d\varphi\, dr\, dz$; ρ è la densità del cilindro, che in caso di distribuzione omogenea di massa è $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$.
Dalla definizione di momento di inerzia rispetto a un generico asse $\hat{a}$, il contributo dell'elemento infinitesimo di massa dm al momento di inerzia è $dI_{\hat{a}} = dm \cdot h^2$, con h distanza dell'elemento dm dall'asse $\hat{a}$. Scegliendo $\hat{a}$ coincidente con l'asse di rotazione e integrando sull'intera massa (ovvero, sull'intero volume) del cilindro, si ottiene:

$$I = \int_M dm \cdot h^2 = \rho \int_V dV \cdot h^2 = \frac{M}{\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2 H}(2\pi)(H)\left(\frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{2} MR^2 = 0.04\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

(2) Scrivere le equazioni cardinali della dinamica che descrivono il moto del cilindro. [6]
Scegliendo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano inclinato e positivo verso l'alto, asse y ortogonale al piano inclinato e positivo verso il basso, asse z ortogonale al piano del disegno e positivo uscente, le equazioni cardinali della dinamica si scrivono come:

$$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (x)\ Ma_x = F - Mg\sin\theta - F_a \\ (y)\ N = Mg\cos\theta \end{cases} \\ \vec{\text{M}}_{\text{tot}} = I\alpha \Rightarrow F_a R = I\alpha \end{cases}$$

con F_a forza di attrito statico.

(3) Qual è l'intervallo di valori di $|\vec{F}|$ per cui il cilindro, partendo da fermo, sale lungo il piano inclinato rotolando senza strisciare (moto di *puro rotolamento*)? [10]
Nel caso di puro rotolamento si ha $a_x = \alpha R = \dot{\omega} R$, ovvero un legame tra l'accelerazione angolare del cilindro (moto di rotazione) e l'accelerazione del centro di massa (moto di traslazione). Eliminando a_x si ottiene: $F_a = \frac{F - Mg\sin\theta}{3}$.
In generale, la forza di attrito statico deve soddisfare $|F_a| \le \mu N$, cioè deve essere minore della forza di attrito massima: $\frac{1}{3}|F - Mg\sin\theta| \le \mu Mg\cos\theta$.
Se il cilindro sale, la rotazione del cilindro avviene in verso antiorario e quindi $F_a > 0 \Rightarrow F > Mg\sin\theta$, che rappresenta l'estremo inferiore dell'intervallo richiesto. Questo risultato permette, inoltre, di risolvere il modulo nella disuguaglianza che definisce la forza di attrito massima. Si ottiene quindi $F - Mg\sin\theta \le 3\mu Mg\cos\theta$, ovvero $F \le Mg(3\mu\cos\theta + \sin\theta)$, che rappresenta l'estremo superiore dell'intervallo. L'intervallo completo dei valori di F compatibili con la condizione di puro rotolamento è quindi $Mg\sin\theta < F \le Mg(3\mu\cos\theta + \sin\theta)$ e sostituendo i valori numerici si ha $9.8N < F \le 25N$

(4) Se $|\vec{F}| = 15.0N$, si calcoli la velocità del cilindro dopo che il suo CM è salito di una quota $h = 20\ cm$. [10]

Il valore di F assegnato è all'interno dell'intervallo determinato al punto (3). Tenendo conto che il cilindro parte da fermo, usando il teorema dell'energia cinetica (e ricordando che la forza di attrito statico F_a non compie lavoro) si ha:

$$\frac{Fh}{\sin\theta} - Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv^2, \text{ da cui } v = \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{Fh}{M\sin\theta} - gh\right)} = 1.2 m/s$$