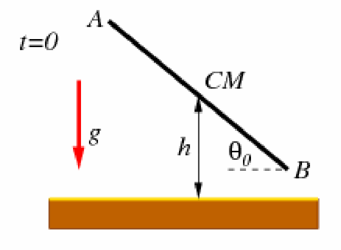
Corso di Laurea in Fisica – Meccanica dei Sistemi – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare lunedì 9 Giugno 2008

Nome ……………………….Cognome ……………………………



Una sbarretta omogenea, di lunghezza ℓ= 10 cm, è inizialmente in quiete in un piano verticale; il suo centro di massa si trova alla distanza h = 40 cm da un piano orizzontale liscio e la sbarretta ha un'inclinazione di θ_0 =30° rispetto all'orizzontale. Ad un certo istante, la sbarretta è lasciata libera di cadere sotto l'azione della forza peso (g = 9.8 m/s^2).

(1) Quanto valgono la velocità del centro di massa e la velocità angolare di rotazione del sistema prima dell'urto tra l'estremo B della sbarretta e il piano orizzontale? [3+3]

L'asta, in caduta libera, è soggetta alla sola forza peso, che ha momento nullo rispetto al centro di massa. La rotazione avviene quindi attorno ad un asse principale di inerzia (asse ortogonale alla sbarretta e passante per il centro di massa), con velocità angolare costante, il cui valore dipende dalle condizioni iniziali del moto di rotazione. Dal momento che inizialmente la sbarra è in quiete (cioè non ruota), ω_i = 0, cioè *il moto prima dell'urto è puramente traslazionale* (θ_0=costante), con velocità di traslazione coincidente con la velocità del centro di massa. Quest'ultima si ricava risolvendo il moto rettilineo uniformemente accelerato di un punto materiale, inizialmente in quiete, soggetto alla forza peso. Scegliendo un asse verticale orientato verso l'alto con origine coincidente con la quota del piano orizzontale, si ha: $\mathrm{v}(t) = -gt \Rightarrow y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. All'istante dell'urto (t_0), l'estremo B tocca il piano orizzontale e quindi il centro di massa si trova alla quota $\frac{l}{2}\sin\theta_0 = h - \frac{1}{2}g(t_0)^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h - \frac{l}{2}\sin\theta_0\right)} \Rightarrow \mathrm{v}(t_0) = \mathrm{v}_i = -\sqrt{2g\left(h - \frac{l}{2}\sin\theta_0\right)}$= -2.7 m/s

(2) Se l'urto contro il piano orizzontale liscio è elastico e l'unica forza impulsiva è la reazione vincolare che agisce nel punto B della sbarretta, quanto valgono la velocità del centro di massa e la velocità angolare di rotazione del sistema dopo l'urto? [5+5]

Sia $\vec{R}$ la reazione vincolare; essendo il piano senza attrito, si tratta di un vettore ortogonale al piano; il verso è negativo nel sistema di riferimento selezionato.
L'impulso J della reazione vincolare durante l'urto è pari alla variazione di quantità di moto $\Rightarrow m\mathrm{v}_f - m\mathrm{v}_i = J$ (eq. 1), con m massa della sbarretta.
Dalla seconda equazione cardinale, calcolando i momenti rispetto al centro di massa della sbarretta, si ottiene: $R\frac{l}{2}\cos\theta_0 = I\frac{d\omega}{dt}$. I è il momento di inerzia della sbarretta rispetto ad un asse ortogonale alla sbarretta e passante per il centro di massa, $I = \frac{1}{12}ml^2$. Separando le variabili e integrando per la durata dell'urto, si ottiene: $J\frac{l}{2}\cos\theta_0 = I\omega_f$ (eq. 2)
Durante l'urto elastico, inoltre, si conserva l'energia meccanica (ovvero l'energia cinetica) del sistema: $\frac{1}{2}m\mathrm{v}_i^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$ (eq. 3).
Si ottiene, quindi un sistema di tre equazioni nelle tre incognite J, v_f e ω_f, che risolto da:

$$\mathrm{v}_f = -\mathrm{v}_i\frac{(1-3\cos^2\theta_0)}{(1+3\cos^2\theta_0)} = -1.0 \text{ m/s}$$

$$\omega_f = -\mathrm{v}_i\frac{12}{l}\frac{\cos\theta_0}{(1+3\cos^2\theta_0)} = 86 \text{ s}^{-1}$$ (positivo, ossia rotazione antioraria)

(3) Quanto vale l'impulso della reazione del piano durante l'urto? [5]

$$J = \frac{-2m\mathrm{v}_i}{(1+3\cos^2\theta_0)} = m\cdot 1.7 \text{ kg m/s}$$

Dopo l'urto, la sbarretta ruota in verso antiorario.
(4) Dopo quanto tempo t* dall'istante dell'urto la sbarretta è orizzontale (cioè è ruotata fino a porsi parallela al piano orizzontale)? [4]

L'azione della reazione vincolare del piano è impulsiva, cioè cessa di agire subito dopo l'urto. Dopol'urto, quindi, la situazione è come quella descritta al punto (1), ovvero *rotazione libera* $(\vec{M} = 0)$ attorno ad un asse principale di inerzia, *con velocità angolare costante* pari al valore iniziale ω_f. La legge oraria con cui evolve nel tempo la variabile angolare θ che descrive la rotazione del sistema si ottiene integrando la velocità angolare: $\theta(t) = -\theta_0 + \omega_f t$ (θ è misurato rispetto alla direzione orizzontale ed è crescente in verso antiorario). Il valore θ=0 corrisponde alla posizione in cui la sbarra è orizzontale e si ha in corrispondenza di t*, $\theta(t^*) = 0 = -\theta_0 + \omega_f t^* \Rightarrow t^* = \frac{\theta_0}{\omega_f} = 6.1 \cdot 10^{-3}$

(5) A che distanza dal piano orizzontale si trova il centro di massa della sbarretta nell'istante t* (quando, cioè, la sbarretta è orizzontale)? [5]

Riscriviamo la legge oraria che descrive il moto del centro di massa, scegliendo come origine dell'asse dei tempi l'istante dell'urto, e imponendo le condizioni iniziali che si hanno subito dopo l'urto. Si ottiene $y(t) = \frac{l}{2}\sin\theta_0 + v_f t - \frac{1}{2}gt^2$, che calcolata in corrispondenza di t* è *y(t*)=0.044 m*.