

Corso di Laurea in Fisica – Meccanica Classica – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare lunedì 17 Marzo 2008

Nome Cognome

Leibnitz si trova sulla torre di Pisa (altezza $h=60.0\text{ m}$) per ripetere gli esperimenti di Galileo, usando delle mele.

Vede sopraggiungere Newton che cammina in Piazza dei Miracoli e che all'istante $t=0$ si trova alla distanza $d=50.0\text{ m}$ dalla base della torre. Leibnitz decide di colpirlo lanciando una mela orizzontalmente, con velocità iniziale v_0 all'istante $t=0$.

Sapendo che Newton viaggia con velocità costante $v_n=1.00\text{ m/s}$,

- (a) calcolare quale è il valore di v_0 affinché Leibnitz abbia successo;
- (b) se Leibnitz lancia la mela con velocità $v_0/2$ e la mela rimbalza al suolo, conservando la componente orizzontale della velocità e riducendo la componente verticale di un fattore f , quanto deve essere f affinché la mela colpisca Newton?

Considerare $|\vec{g}|=9.81\text{ ms}^{-2}$

Soluzione

(a) Scegliamo il sistema di riferimento con la torre di Pisa a $x=0$; all'istante $t=0$ Newton si trova a $x=d$.

La mela cade per azione della accelerazione di gravità, con le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{ll} v_x(t=0)=v_0 & v_y(t=0)=0 \\ x(t=0)=0 & y(t=0)=h \end{array}$$

Le equazioni del moto sono pertanto:

$$\begin{array}{ll} a_x=0 & a_x=-g \\ v_x(t)=v_0 & v_y(t)=-gt \\ x(t)=v_0t & y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h \end{array}$$

La mela tocca terra quando $y(t^*)=0$ in corrispondenza dell'istante t^* . Risulta quindi:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3.50\text{ s}$$

Il moto di Newton è rettilineo uniforme lungo l'asse con condizione iniziale $x(t=0)=d$ e velocità $-v_N$. Risulta allora per l'ascissa x_N corrispondente alla posizione di Newton:

$$x_N(t) = -v_N t + d$$

La condizione che la mela colpisca Newton nell'istante t^* in cui la mela tocca terra corrisponde a:

$$x(t^*) = x_N(t^*) \Rightarrow v_0 t^* = -v_N t^* + d \Rightarrow v_0 = -v_N + \frac{d}{t^*} = 13.3 \text{ m/s}$$

(b) La mela è lanciata con velocità $v_0/2$ e rimbalza. È necessario studiare il moto della mela prima e dopo il rimbalzo.

Procedendo come sopra, prima del rimbalzo la mela ha equazioni:

$$\begin{array}{ll} a_x = 0 & a_x = -g \\ v_x(t) = \frac{v_0}{2} & v_y(t) = -gt \\ x(t) = \frac{v_0}{2} t & y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{array}$$

e tocca terra sempre nell'istante t^* tale che $y(t^*)=0$, in corrispondenza della posizione

$$x(t^*) = \frac{v_0}{2} t^*.$$

Le componenti della velocità prima del rimbalzo all'istante t^* sono:

$$\begin{array}{l} v_x = \frac{v_0}{2} \\ v_y = -g t^* \end{array}$$

Le componenti della velocità dopo il rimbalzo sono:

$$\begin{array}{l} v_x(t = t^*) = \frac{v_0}{2} \\ v_y(t = t^*) = -f v_y = f g t^* \end{array}$$

Notare che v_y cambia segno perchè la mela rimbalza verso l'alto.

Il moto dopo il rimbalzo ($t > t^*$) è quindi ancora il moto di un corpo soggetto alla sola accelerazione di gravità. Tenendo conto delle condizioni del moto all'istante t^* si trovano le equazioni:

$$\begin{array}{ll} a_x = 0 & a_x = -g \\ v_x(t) = \frac{v_0}{2} & v_y(t) = -g(t - t^*) + f g t^* \\ x(t) = \frac{v_0}{2}(t - t^*) + \frac{v_0}{2} t^* & y(t) = -\frac{1}{2} g(t - t^*)^2 + f g t^*(t - t^*) \end{array}$$

La mela tocca nuovamente terra quando $t=t_f$, che è dato dalla condizione

$$y(t_f) = -\frac{1}{2}g(t_f - t^*)^2 + fg t^*(t_f - t^*) = 0$$

da cui si ottiene $t_f = t^* + 2f t^*$

Affinché all'istante t_f la mela colpisca Newton, si deve avere:

$$x(t_f) = x_N(t_f) \Rightarrow \frac{v_0}{2}(t_f - t^*) + \frac{v_0}{2} t^* = -v_N t_f + d$$

Sostituendo il risultato trovato per t_f e risolvendo l'equazione si trova:

$$f = \frac{d - v_N \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}}}{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2v_N \sqrt{\frac{2h}{g}}} = 0.433$$