Corso di Laurea in Fisica – Meccanica Classica – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare <u>mercoledì 26 Marzo 2008</u>

Nome …………………………Cognome ……………………………

Un punto materiale di massa m si trova al tempo t=0 nella posizione $\vec{P}_0 \equiv (0, a, -b)$ con velocità iniziale $\vec{v}_0 \equiv (aB, 0, \frac{Bb}{\pi})$ e si muove sotto l'effetto di un'accelerazione sempre ortogonale alla componente di v sul piano (x,y), ovvero data da: $\vec{a}(t) = B\hat{z} \wedge \vec{v}(t) \equiv [-Bv_y(t), Bv_x(t), 0]$

(1) Determinare $\vec{v}(t)$ [7]

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -Bv_y \Rightarrow v_y = -\dfrac{1}{B}\dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = Bv_x \Rightarrow -\dfrac{1}{B}\dfrac{d^2v_x}{dt^2} = Bv_x \Rightarrow \dfrac{d^2v_x}{dt^2} = -B^2 v_x \Rightarrow \text{soluzione armonica} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = C_1\cos(Bt+\varphi) \\ v_y(t) = C_1\sin(Bt+\varphi) \\ v_z(t) = \text{cost} = \mathrm{C}_2 \end{cases} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

Le costanti di integrazione C_1, C_2, φ si determinano dalle condizioni iniziali ($\vec{v}_0$)

$$\begin{cases} v_x(t=0) = C_1\cos(\varphi) = aB \\ v_y(t=0) = C_1\sin(\varphi) = 0 \\ v_z = \text{cost} = \mathrm{C}_2 = \dfrac{Bb}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = aB \\ \varphi = 0 \\ C_2 = \dfrac{Bb}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = aB\cos(Bt) \\ v_y(t) = aB\sin(Bt) \\ v_z(t) = \dfrac{Bb}{\pi} \end{cases}$$

(2) Determinare $\vec{a}(t)$ [4]

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -aB^2\sin(Bt) = -Bv_y \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = aB^2\cos(Bt) = Bv_x \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

(3) Determinare $\vec{r}(t)$ [4]

$$\text{integrando } \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a\sin(Bt) + A_1 \\ v_y(t) = -a\cos(Bt) + A_2 \\ v_z(t) = \dfrac{Bb}{\pi}t + A_3 \end{cases}$$

moto elicoidale uniforme a base circolare, con raggio $r=a$ e pulsazione $\omega=B$

Le costanti di integrazione A_1, A_2, A_3 si determinano dalle condizioni iniziali ($\vec{P}_0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A_1 = 0 \\ y(t=0) = -a + A_2 = a \\ z(t=0) = A_3 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 2a \\ A_3 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = a\sin(Bt) \\ y(t) = a[2-\cos(Bt)] \\ z(t) = \dfrac{Bb}{\pi}t - b \end{cases}$$

(4) Determinare la posizione $\vec{P}_1$ del punto materiale al tempo $t_1 = \dfrac{\pi}{B}$ [2]

$$\begin{cases} x(t=\dfrac{\pi}{B}) = a\sin\left(B\dfrac{\pi}{B}\right) \\ v_y(t=\dfrac{\pi}{B}) = a\left[2-\cos\left(B\dfrac{\pi}{B}\right)\right] \Rightarrow \vec{P}_1 = (0, 3a, 0) \\ v_z(t=\dfrac{\pi}{B}) = \dfrac{Bb}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{B}\right) - b \end{cases}$$

Per $t>t_1$ sul punto agisce anche un'accelerazione costante diretta in verso contrario all'asse z, $\vec{a}(t) \equiv \left[-0{,}0{,}-\frac{D}{m}\right]$

(5) Determinare l'espressione di $\vec{v}_z(t)$ per $t>t_1$ [3]

$v_z(t) = \frac{Bb}{\pi} - \frac{D}{m}(t-t_1)$ (moto uniformemente decelerato)

(6) Determinare il tempo t_2 nel quale il punto materiale attraversa di nuovo il piano (x,y) su cui giace $\vec{P}_1$ [5]

$z(t) = \frac{Bb}{\pi}(t-t_1) - \frac{1}{2}\frac{D}{m}(t-t_1)^2$

Imponendo $z(t_2) = \frac{Bb}{\pi}(t_2-t_1) - \frac{1}{2}\frac{D}{m}(t_2-t_1)^2 = 0 \Rightarrow (t_2-t_1) = \Delta t = \begin{cases} 0 \ \ (t_2 = t_1) \\ \frac{2mBb}{\pi D} \end{cases}$

Alternativamente, si osserva che, in corrispondenza del tempo $t^*>t_1$, ovvero dopo un intervallo $\Delta t^* = t^* - t_1$ si ha $v_z(t^*) = 0 \Rightarrow$ inversione del moto cioè, per $t<t^*$ si ha $v_z(t) > 0$; per $t>t^*$ → $v_z(t) < 0$, e $\Delta t^* = \frac{mBb}{\pi D}$. Dopo altrettanto tempo Δt^* il punto materiale ritorna alla quota $z(t_1)$, quindi $\Delta t = t_2 - t_1 = 2\Delta t^* = \frac{2mBb}{\pi D}$

(7) Calcolare il valore di D necessario affinché in t_2 il punto ripassi esattamente per la posizione $\vec{P}_1$ [5]

Perché ciò avvenga, deve essere $\Delta t = kT$, cioè l'intervallo Δt deve essere multiplo del *periodo* del moto $T = \frac{2\pi}{B}$

$\Rightarrow \frac{2mBb}{\pi D} = k\frac{2\pi}{B} \Rightarrow D = \frac{mB^2 b}{\pi k}$ (k=1,2,…)