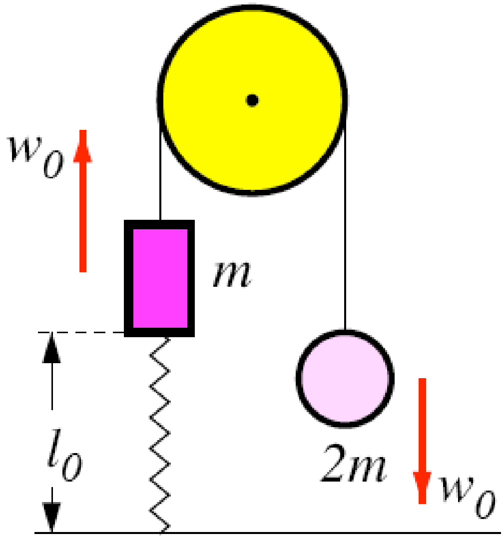
Corso di Laurea in Fisica – Meccanica Classica – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare <u>lunedì 28 Aprile 2008</u>

Nome ……………………………Cognome ……………………………



Si consideri il sistema illustrato in figura. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0 è vincolata al suolo. L'altro estremo della molla è collegato ad una massa m libera di muoversi verticalmente. A tale massa è connesso un filo che la unisce, tramite una carrucola di massa trascurabile, ad un secondo corpo di massa $2m$, anch'esso libero di muoversi verticalmente. Il filo è in estensibile e di massa trascurabile.
Dati numerici:
g=9.81 m/s^2; m=0.927 kg; L_0=12.0 cm; w_0 = 0.709 m/s; k = 303 N/m

(1) Calcolare la lunghezza di equilibrio *Leq* della molla. [10]

Scegliendo un sistema di riferimento con un asse y verticale verso l'alto e origine in corrispondenza della quota del suolo, le equazioni di Newton scritte per le due masse (la massa 1 è m, la massa 2 è $2m$) sono:

$$\begin{cases} ma_1 = T - k(y - l_0) - mg \\ 2ma_2 = T - 2mg \end{cases}$$

All'equilibrio $a_1 = a_2 = 0$, $y = l_{eq}$. Eliminando T, si trova: $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ =15.0cm, che corrisponde a una deformazione (positiva) della molla $\Delta l = l_{eq} - l_0$ = 3.00 cm.

(2) Si supponga che all'istante t=0 la molla abbia lunghezza L_0 e che le due masse abbiano velocità di modulo w_0 dirette come in figura. Qual è la lunghezza massima L_{max} e minima L_{min} della molla nelle successive oscillazioni? [10]

Trascurando tutti gli attriti, risolviamo imponendo la conservazione dell'energia meccanica. Se il filo è teso, uno spostamento $\Delta l = y - l_0$ verso l'alto della massa 1 corrisponde a un uguale spostamento verso il basso della massa 2; tale spostamento corrisponde a una variazione di energia potenziale (elastica e gravitazionale). Tenendo conto che in L_{max} e L_{min} l'energia cinetica è nulla, si ha (Δl^* tale che K=0):

$$E = K_1 + K_2 + U_1 + U_2 = E(t=0) = \frac{1}{2}mw_0^2 + \frac{1}{2}(2m)w_0^2 + mgl_0 + 2mgh_2 = mg(l_0 + \Delta l^*) + 2mg(h_2 - \Delta l^*) + \frac{1}{2}k\Delta l^{*2}$$

Si ottiene, cioè un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita Δl^* le cui due soluzioni sono $\Delta l_{\max}$, $\Delta l_{\min}$ e $L_{\max} = l_0 + \Delta l_{\max}$, $L_{\min} = l_0 + \Delta l_{\min}$. Risolvendo si trova:

$$\Delta l^* = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{m^2 g^2 + 3kmw_0^2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta l_{\max} = 10.4cm \Rightarrow L_{\max} = 22.4cm \\ \Delta l_{\min} = -4.43cm \Rightarrow L_{\min} = 7.57cm \end{cases}$$

A un risultato analogo si poteva pervenire studiando la dinamica del sistema a partire dalle equazioni di Newton (se la corda è tesa si ha $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$, $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$), ossia risolvendo l'equazione differenziale per la variabile y(t), che rappresenta la lunghezza della molla (cioè la posizione della massa 1, che coincide con l'estremo libero della molla). y(t) evolve nel tempo con legge armonica, e oscilla tra L_{max} e L_{min}.

(3) Nel moto considerato al punto (2), qual è il valore massimo T_{max} e minimo T_{min} della tensione del filo? [8]

A partire dalle equazioni di Newton scritte per le due masse risolvendo per T si ottiene $T = \frac{2}{3}(2mg + k\Delta l)$ e sostituendo al posto di Δl i valori $\Delta l_{\max}$, $\Delta l_{\min}$ si ottengono T_{max} =33.1 N e T_{min} = 3.18 N

Rispondere alle domande (2) e (3) assumendo l'ipotesi che la corda rimanga sempre tesa. Sulla base dei risultati numerici questa ipotesi è verificata? [2]
La corda è tesa se $T \geq 0$, ipotesi verificata anche per T_{min}.
Formalmente, dall'espressione per T si trova che $T \geq 0$ implica $(2mg + k\Delta l) \geq 0$ che calcolata per T_{min} (cioè per $\Delta l_{\min}$) significa $\Delta l_{\min} \geq -\frac{2mg}{k}$. Questa relazione si traduce in un limite superiore per il modulo della velocità iniziale w_0: sostituendo, infatti, al posto di $\Delta l_{\min}$, l'espressione trovata imponendo la conservazione dell'energia meccanica $\Delta l_{\min} = \frac{mg}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{m^2 g^2 + 3kmw_0^2}$ si ottiene la disuguaglianza $|w_0| \leq 2g\sqrt{\frac{2m}{3k}}$