Corso di Laurea in Fisica – Meccanica dei Sistemi – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare lunedì 19 Maggio 2008

Nome ………………………….Cognome ……………………………

Un sistema è costituito da una sbarra di lunghezza L = 80.0 cm e massa nulla, ai cui estremi sono posti due corpi puntiformi di uguale massa $m_1 = m_2 = m = 250$ g.
(1) Qual è la posizione del centro di massa del sistema? [2]
La *distribuzione di massa* è *simmetrica*: il *centro di massa* (c.d.m.) coincide con *il centro della sbarra*.

La sbarra, mantenuta sempre orizzontale, è vincolata a ruotare in senso antiorario attorno ad un asse verticale passante per il centro della sbarra con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 250$ giri/minuto. Calcolare:

(2) la quantità di moto, il momento angolare (modulo, direzione, verso) e l'energia cinetica totale del sistema nella configurazione iniziale [3+5+3]
Scegliamo un sistema di riferimento con origine coincidente con il centro della sbarra e con asse z coincidente con l'asse di rotazione; il verso positivo dell'asse z coincide con il verso positivo di $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$ .Il piano di rotazione (che contiene i vettori posizione e velocità delle masse $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{\mathrm{v}}_1,\ \vec{\mathrm{v}}_2$) è sempre ortogonale a z. La traiettoria delle masse è una circonferenza di raggio $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r = \dfrac{L}{2} = 0.400$ m, percorsa con velocità tangenziale ($\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{\mathrm{r}}$) $|\vec{\mathrm{v}}_1| = |\vec{\mathrm{v}}_2| = \mathrm{v} = \mathrm{r}\omega$.
All'istante iniziale $\omega = \omega_0 = 26.2\ \mathrm{s}^{-1}$.
$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = (\vec{r}_1 \wedge m\vec{\mathrm{v}}_1) + (\vec{r}_2 \wedge m\vec{\mathrm{v}}_2) = 2mr\mathrm{v} \cdot \hat{k} = 2mr^2\omega_0 \cdot \hat{k}$ (la direzione coincide con quella dell'asse di rotazione, il verso è concorde con la rotazione) e $|\vec{P}| = 2.10$ Js.
La quantità di moto totale è la quantità di moto del c.d.m., che è fermo (si trova sull'asse di rotazione) $\Rightarrow \vec{Q} = 0$
L'energia cinetica totale è $K = \dfrac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + \dfrac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 = mr^2\omega_0^2 = 27.4$ J.
Mediante un opportuno meccanismo, un tavolo scabro, parallelo al piano di rotazione della sbarra, viene sollevato fino a giungere a contatto con le masse (il piano tocca le masse, ma non la sbarra). Il coefficiente di attrito dinamico tra le masse e il tavolo è μ=0.200. Calcolare:

(3) la risultante delle forze di attrito tra le masse e il tavolo [4]
Le forze di attrito $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ si oppongono al moto delle masse. Per ciascuna massa, il modulo della forza di attrito è proporzionale alla reazione normale del tavolo, che si oppone alla forza peso: $|\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = |f_{att}| = \mu |R_n| = \mu \cdot mg$.
Durante la rotazione, le velocità $\vec{\mathrm{v}}_1$ e $\vec{\mathrm{v}}_2$ sono sempre uguali in direzione e modulo, ma opposte in verso. Di conseguenza, $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \Rightarrow \vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$

(4) il momento risultante delle forze di attrito (modulo, direzione, verso) [5]
$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (\vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1) + (\vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2) = -2r\mu \cdot mg \cdot \hat{k}$ (la direzione coincide con quella dell'asse di rotazione, ma il verso è opposto → *momento frenante*) e $|\vec{M}| = 0.392$ J.
(5) la legge $\omega(t)$ con cui varia nel tempo la velocità angolare del sistema per effetto degli attriti [5]
Dalla *seconda equazione cardinale* $\vec{M} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ proiettata lungo l'asse z si ha: $-2r\mu \cdot mg = \dfrac{d}{dt}\left(2mr^2\omega\right) \Rightarrow \dot{\omega} = -\dfrac{\mu g}{r}$,
cioè l'applicazione di un momento frenante costante in modulo e parallelo all'asse di rotazione produce una decelerazione angolare costante. Integrando rispetto al tempo e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene: $\omega(t) = -\dfrac{\mu g}{r} t + \omega_0$
(6) dopo quanto tempo t^* il sistema si ferma [3]
t^* tale che $\omega(t^*) = 0 \Rightarrow -\dfrac{\mu g}{r} t^* + \omega_0 = 0 \Rightarrow t^* = \dfrac{r\omega_0}{\mu g} = 5.34$ s